# Geometria Analitica

Studia la corrispondenza biunivoca

tra i Punti di un piano sul quale viene fissato

un Riferimento Cartesiano Ortogonale Monometrico

e

Coppie ordinate di Numeri Reali

Salvatore Di Lucia 8 Luglio 2011

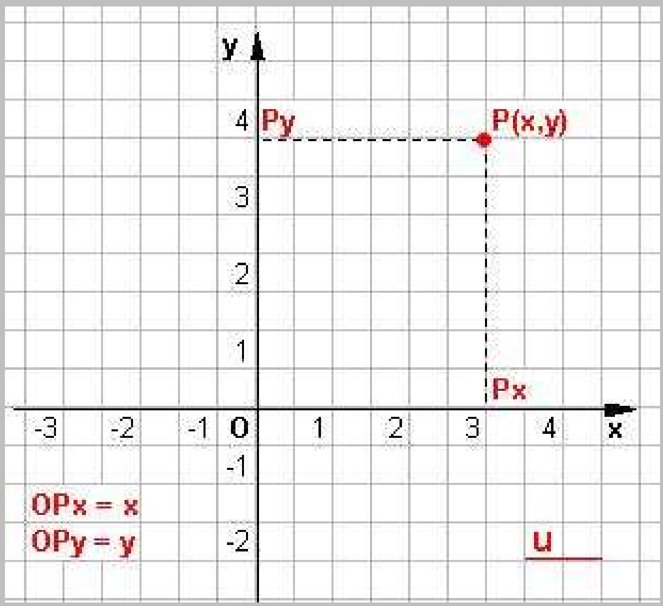
# INDICE

## Coordinate cartesiane nel piano

La geometria analitica si basa sul concetto di assi coordinati introdotto da Cartesio e da P. Fermat nel 1637.
E' possibile stabilire una corrispondenza biunivoca fra i punti di un piano e le coppie ordinate di numeri reali.

a) dato il punto determinare la coppia di valori,
b) data la coppia di valori determinare il punto.

Tracciamo sul piano due rette orientate perpendicolari fra loro (**assi coordinati**), in generale una orizzontale e l'altra verticale, chiamandole, rispettivamente, **asse X o delle ascisse ed asse Y o delle ordinate**. Il punto O di intersezione delle due rette si dice origine degli assi.

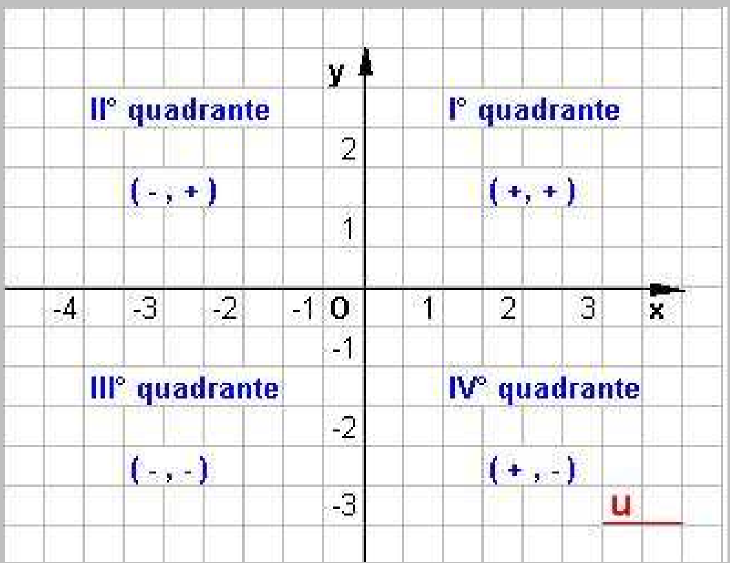



Definiamo **piano cartesiano ortogonale xOy** un piano sul quale siano stati fissati due assi coordinati ed una unità di misura.

a) Considerato un punto qualunque P del piano, siano $P_x$ e $P_y$ le proiezioni ortogonali di P sull'asse x e sull'asse y. Fissata una unità di misura u, siano $\mathbf{x_1}$ e $\mathbf{y_1}$, rispettivamente, le misure dei segmenti orientati $OP_x$ ed $OP_y$. I numeri così trovati si chiamano **coordinate cartesiane del punto P**. Precisamente: $\mathbf{x_1}$ **ascissa** del punto P, $\mathbf{y_1}$ **ordinata** di P. In questo modo abbiamo associato al punto generico P del piano la coppia ordinata di numeri reali $(\mathbf{x_1,y_1})$, scriveremo:

$$P = (x_1,y_1) \quad \text{oppure} \quad P(x_1,y_1).$$

Tale scrittura si legge "**punto P di coordinate $\mathbf{x_1, y_1}$**", intendendo con la parola la coppia ordinata di numeri reali $(x_1,y_1)$.




b) Viceversa, considerati due numeri reali $x_1$ ed $y_1$, é possibile determinare uno ed un sol punto P appartenente al piano, avente ascissa $x_1$ ed ordinata $y_1$.
Infatti, determinati sugli assi x ed y i punti $P_x$ e $P_y$ tali che i segmenti orientati $OP_x$ ed $OP_y$ abbiano misura $x_1$ ed $y_1$ , se completiamo il rettangolo di lati $OP_x$ ed $OP_y$ si determina sul piano uno ed un solo punto P, quarto vertice del rettangolo $OP_xPP_y$ (vedi figura) corrispondente alle coordinate $(x_1,y_1)$.
In definitiva resta così stabilita la **corrispondenza biunivoca** dei punti del piano con le coppie ordinate dei numeri reali, cioè: ad ogni punto del piano corrisponde una coppia di numeri (detti le coordinate del punto) e ad ogni coppia ordinata di numeri reali corrisponde un punto del piano avente quei due numeri come coordinate.

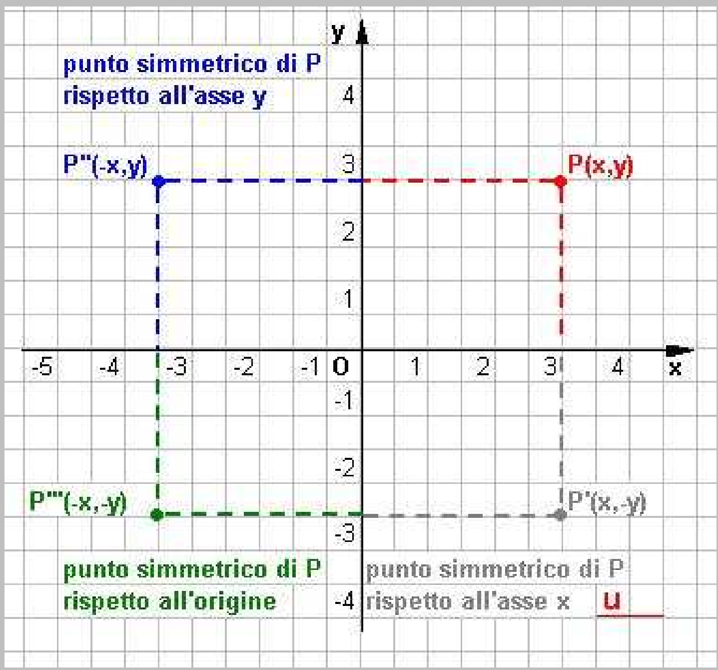
## Caratterizzazione del piano cartesiano

Gli assi x ed y dividono il piano in quattro angoli retti che si dicono **quadranti** disposti in senso antiorario, come indicato in figura nella pagina precedente, detti rispettivamente primo, secondo, terzo e quarto quadrante. I quadranti così definiti caratterizzano:

| Quadrante | Ascisse: x | Ordinate: y | Segni coordinate |
|---|---|---|---|
| **I°** | + | + | **Concordi** |
| **II°** | – | + | **Discordi** |
| **III°** | – | – | **Concordi** |
| **V°** | + | – | **Discordi** |

**a)** i punti del primo quadrante hanno ascissa ed ordinata ambedue maggiori di zero;
**b)** i punti del secondo quadrante hanno ascissa minore di zero ed ordinata maggiore di zero;
**c)** i punti del terzo quadrante hanno ascissa ed ordinata ambedue minori di zero;
**d)** i punti del quarto quadrante hanno ascissa maggiore di zero ed ordinata minore di zero;
**e)** i punti dell'asse delle ascisse hanno ordinata nulla;
**f)** i punti dell'asse delle ordinate hanno ascissa nulla;
**g)** l'origine degli assi cartesiani è l'unico punto del piano avente ascissa ed ordinata nulle.

## Punti simmetrici




Due **punti simmetrici rispetto all'asse x** hanno la stessa ascissa e le ordinate opposte:

**P(x,y)** e **P'(x, –y)** .

Due **punti simmetrici rispetto all'asse y** hanno la stessa ordinata e le ascisse opposte:

**P(x,y)** e **P"(–x,y)** .

Due **punti simmetrici rispetto all'origine**
a) hanno entrambe le coordinate opposte:
**P(x,y)** e **P"'(–x, –y)** **I° - III° quad.**
b) hanno le ascisse ed ordinate opposte e viceversa
**P'(x, – y)** e **P"(–x, y)** **II° - IV° quad.**

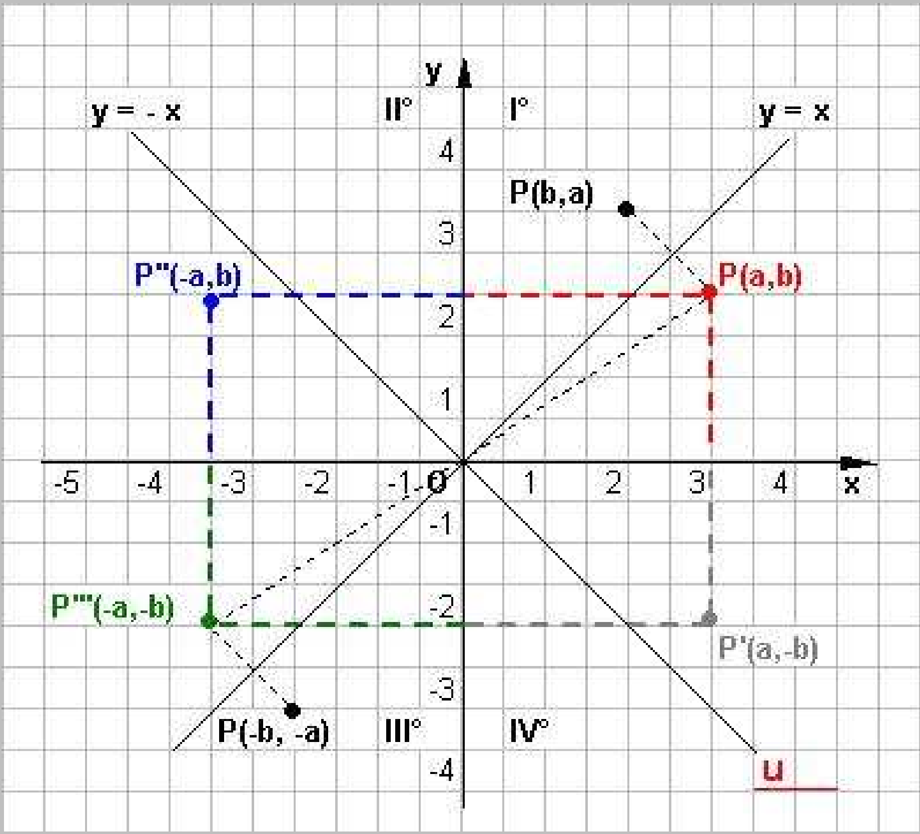
Due **punti simmetrici rispetto alla bisettrice del I e III quadrante ( y = x )** hanno come coordinate:

**P(x,y) e Q(y,x)**

Due **punti simmetrici rispetto alla bisettrice del II e IV quadrante (y = –x)** hanno come coordinate:

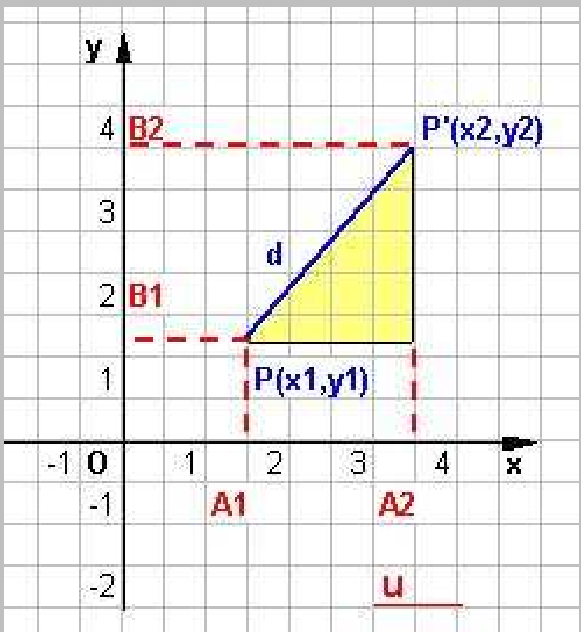
**P(x,y) e Q'(–y, –x).**

Da quanto detto possiamo, dato il punto P(a,b), riscontrare i suoi simmetrici:




rispetto all’asse x ha coordinate (a, – b)
rispetto all’asse y ha coordinate **(– a, b)**
rispetto all’origine ha coordinate **(– a, – b )** ( I° - III° quad. e viceversa)
rispetto alla bisettrice I° - III° quad. ha coordinate **( b,a )**
rispetto alla bisettrice II° - IV° quad. ha coordinate **(– b, – a )**
Inoltre se il punto dato fosse stato P’(a, – b) il suo simmetrico rispetto all’origine sarebbe stato **(– a, b )** ( II° -IV° quad.).

## Distanza tra due punti




Siano $P(x_1,y_1)$ e $P'(x_2,y_2)$ due punti del piano riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali xOy; si vuole trovare la loro distanza d = PP'. Dal teorema di Pitagora applicato al triangolo risulta

$$\mathbf{d} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Perciò: la distanza fra due punti di coordinate assegnate è data dalla radice quadrata della somma dei quadrati delle differenze tra le rispettive coordinate.
Casi particolari:

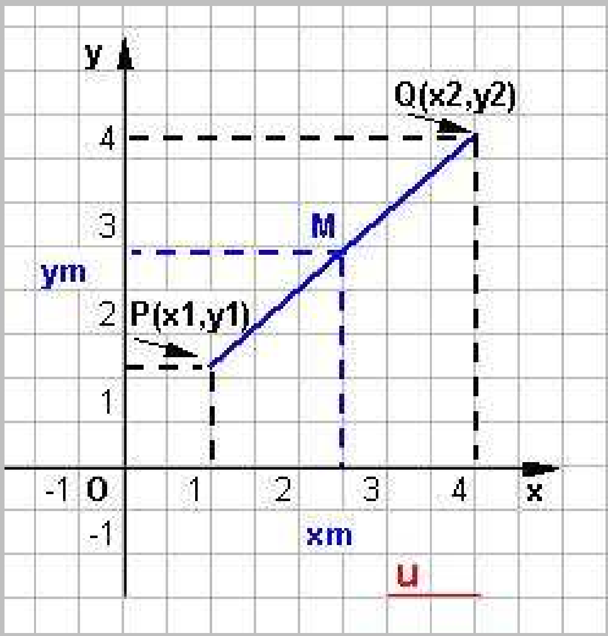
**a)** uno dei due punti, ad esempio B, coincide con l'origine del piano cartesiano.
Tenuto conto che O(0,0), avremo:

$$d = OA = \sqrt{x_1^{\,2} + y_1^{\,2}}$$

**b)** i due punti A e B hanno ugual ordinata. Allora si ha :   $d = | x_B - x_A |$

**c)** i due punti A e B hanno ugual ascissa. Allora si ha :   $d = | y_B - y_A |$

## Coordinate del punto medio di un segmento




Assegnati due punti di coordinate $P(x_1,y_1)$, $Q(x_2,y_2)$ determinare le coordinate **$(x_m,y_m)$** di M, punto medio del segmento PQ.

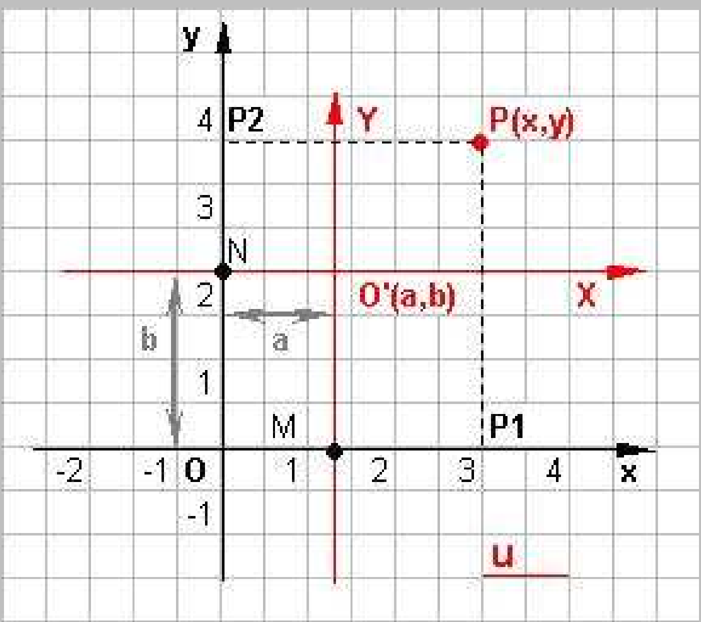
| **Asse x** | **Asse y** |
|---|---|
| $P_xM_x=M_xQ_x$ | $P_yM_y=M_yQ_y$ |
| $x_m - x_1 = x_2 - x_m$ | $y_m - y_1 = y_2 - y_m$ |
| $2x_m = x_1 + x_2$ | $2y_m = y_1 + y_2$ |

da cui le formule che permettono di calcolare tali coordinate sono:

$$x_m = \frac{(x_1 + x_2)}{2} \qquad y_m = \frac{(y_1 + y_2)}{2}$$

Conclusione: **Le coordinate del punto medio di un segmento sono uguali alla semisomma delle coordinate omonime degli estremi**.
Esempio:
Trovare le coordinate del punto medio del segmento che ha per estremi i punti P(3, –5) e Q(7, –3).
Si ha: $x_M = (3 + 7)/2 = 5$ , $y_M = (-5 -3)/2 = -4$

## La traslazione degli assi




Dato il sistema di assi cartesiani XOY, si consideri il sistema di assi cartesiani XO'Y , con gli assi X e Y rispettivamente equiversi e paralleli agli assi x,y ed avente l'origine nel punto O'(a,b).
Se P è un punto generico con coordinate (x,y), nel sistema xOy, e (X,Y), nel sistema XO'Y, valgono le seguenti trasformazioni :

$x = OP_1 = OM + MP_1 = a + X$
$y = OP_2 = ON + NP_2 = a + Y$

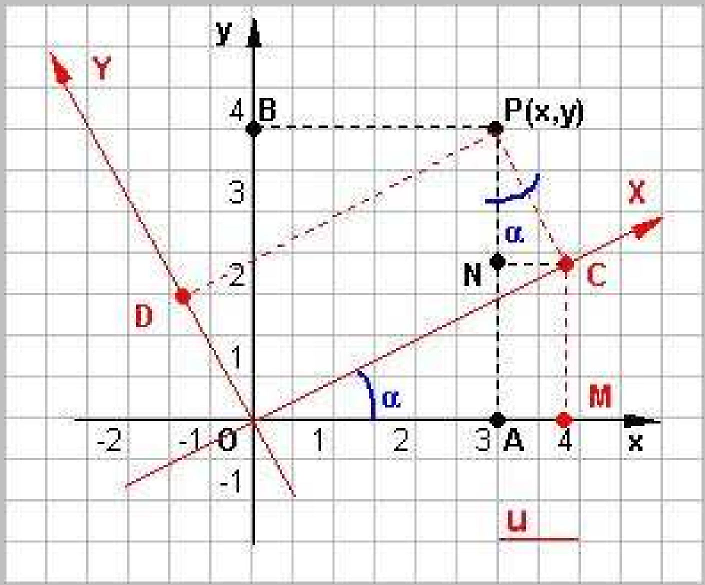
in definitiva :

**traslazione** $\begin{cases} \mathbf{x = X + a} \\ \mathbf{y = Y + b} \end{cases}$

**traslazione inversa**
$$\begin{cases} X = x - a \\ Y = y - b \end{cases}$$

Formule che permettono di effettuare il passaggio da un sistema dato al nuovo sistema e viceversa.

## La rotazione degli assi




Talvolta si presenta la necessità di trasformare le coordinate di un punto, quando i nuovi assi hanno la stessa origine di quelli primitivi, ma sono ruotati rispetto ad essi di un angolo di ampiezza **α.**

Gli assi primitivi siano x, y; i nuovi X e Y, e questi siano ruotati di un angolo ampio **α**, rispetto ai primitivi.

Da P si conducano i segmenti perpendicolari PA, PB, PC, PD rispettivamente agli assi x, y, X e Y.
Da C si conduca CM perpendicolare all'asse delle x e CN perpendicolare al segmento PA.

Si nota intanto che è $x\hat{O}X = NPC$, essendo angoli acuti con i lati perpendicolari, e che OA = x, OB = y, OC = X e OD = Y.
Poichè è
$$x = OA = OM - NC$$

Per le proprietà dei triangoli rettangoli in trigonometria i singoli addendi avranno espressione:

$$OM = OC \cos\alpha = X \cos\alpha \quad e \quad NC = PC \sin\alpha = OD \sin\alpha = Y \sin\alpha ,$$
da cui:

$$x = OA = OM - NC = X \cos\alpha - Y \sin\alpha$$

Analogamente :
$$y = AP = MC + NP$$

dove $MC = OC \sin\alpha = X \sin\alpha$ e $NP = PC \cos\alpha = OD \cos\alpha = Y \cos\alpha$

risultando
$$y = AP = MC + NP = X \sin\alpha + Y \cos\alpha$$

In definitiva :

$$\begin{cases} x = X \cos\alpha - Y \sin\alpha \\ y = X \sin\alpha + Y \cos\alpha \end{cases}$$
Queste formule servono per passare dal vecchio al nuovo sistema ; mentre risolvendo lo stesso sistema rispetto ad X ed Y, si trova

$$\begin{cases} X = x\cos\alpha + y\sin\alpha \\ Y = -x\sin\alpha + y\cos\alpha \end{cases}$$

Dove quest'ultime servono per il passaggio inverso.
Per memorizzarle è opportuno tenere a mente la semplice tabella:

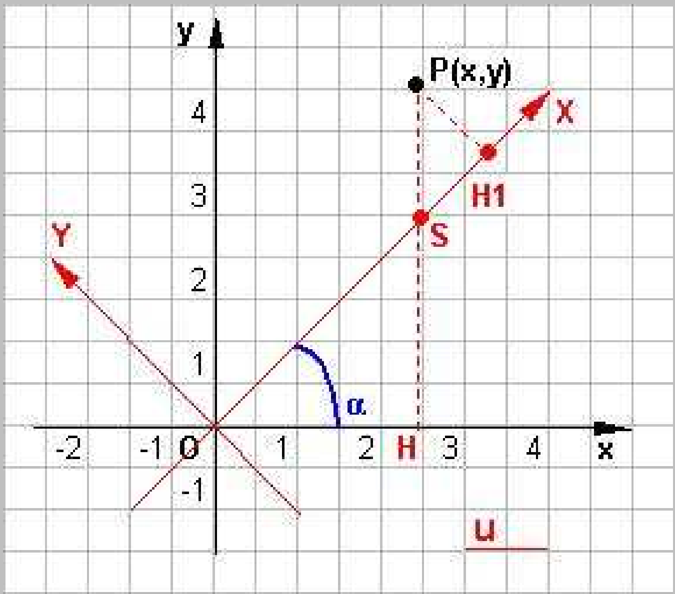
| + | X | Y |
|---|---|---|
| **x** | **cosα** | **– sinα** |
| **y** | **sinα** | **cosα** |

Da essa è facile ottenere un'incognita qualsiasi, ad esempio X, addizionando il prodotto delle altre incognite per le funzioni goniometriche contenute nella riga dell'incognita cercata.

Se **α = 45°** in senso antiorario allora $\sin\alpha = \cos\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ottenendo :

$$\begin{cases} x = X\frac{\sqrt{2}}{2} - Y\frac{\sqrt{2}}{2} \\ y = X\frac{\sqrt{2}}{2} + Y\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \qquad \begin{cases} X = x\frac{\sqrt{2}}{2} + y\frac{\sqrt{2}}{2} \\ Y = -x\frac{\sqrt{2}}{2} + y\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

Le stesse conclusioni si potevano raggiungere anche con considerazioni geometriche, notando dalla figura a lato che :




$$x = OH = \frac{OS}{\sqrt{2}} = \frac{OH_1 - SH_1}{\sqrt{2}}$$

essendo OHS metà quadrato anche $PH_1S$ lo sarà con $SH_1=H_1P$, quindi si potrà scrivere

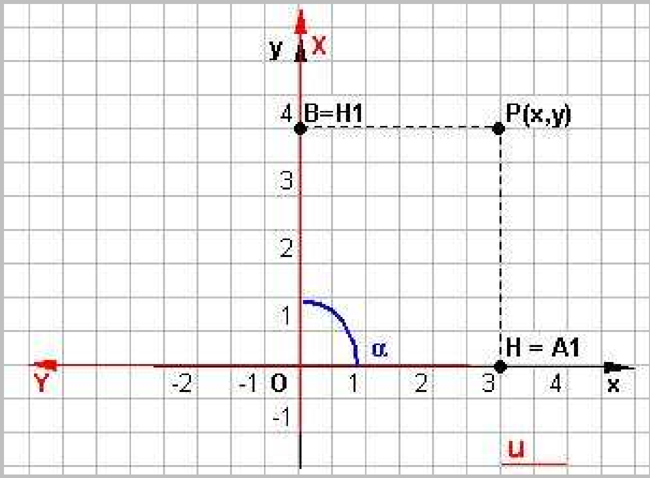
$$x = \frac{OH_1 - SH_1}{\sqrt{2}} = \frac{OH_1 - H_1P}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}(X - Y)$$

Analogamente :

$$y = HP = HS + SP = \frac{OS}{\sqrt{2}} + \sqrt{2}\,H_1P$$

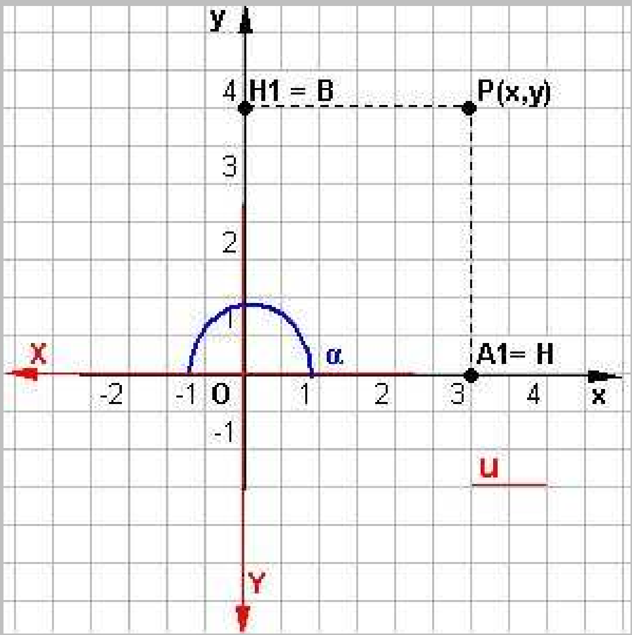
da cui

$$y = \frac{OS}{\sqrt{2}} + \sqrt{2}\,H_1P = \frac{\sqrt{2}}{2}(OH_1 - SH_1) + \sqrt{2}\,H_1P = \frac{\sqrt{2}}{2}(X + Y)$$



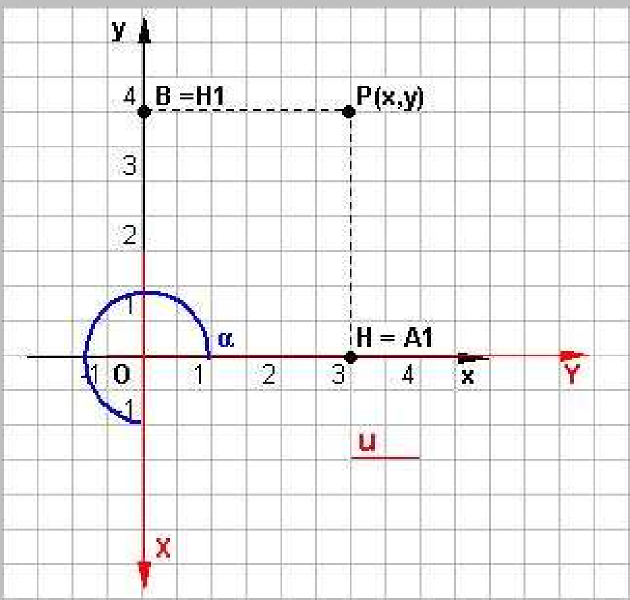

Se **α = 90°** in senso antiorario allora l'asse X si sovrappone in direzione e verso dell'asse y e l'asse Y si sovrappone all'asse x, ma con verso opposto, conseguentemente (oltre che con facili considerazioni trigonometriche) abbiamo :

$$\begin{cases} x = -Y \\ y = X \end{cases} \qquad \begin{cases} X = y \\ Y = -x \end{cases}$$




Se **α = 180°** rotazione in senso antiorario allora l'asse X si sovrappone all'asse x, ma con verso opposto, così pure l'asse Y con verso opposto. Da cui le formule del puntp P nei due sistemi:

$$\begin{cases} x = -X \\ y = -Y \end{cases} \qquad \begin{cases} X = -x \\ Y = -y \end{cases}$$

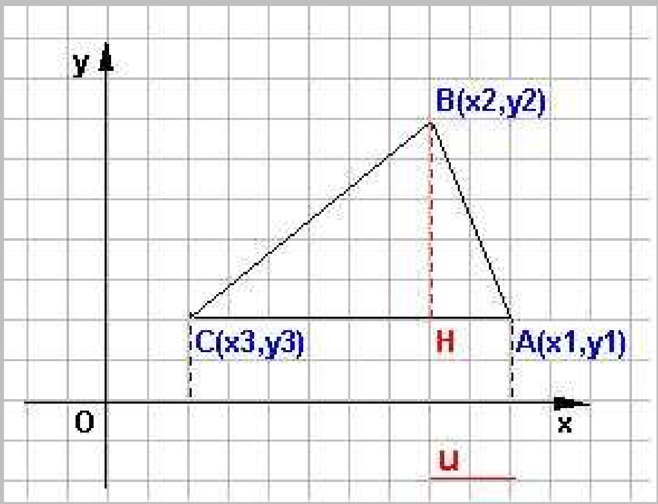



Se **α = 270°** in definitiva ricaviamo :

$$\begin{cases} x = Y \\ y = -X \end{cases} \qquad \begin{cases} X = -y \\ Y = x \end{cases}$$

## Area di un triangolo primo approccio

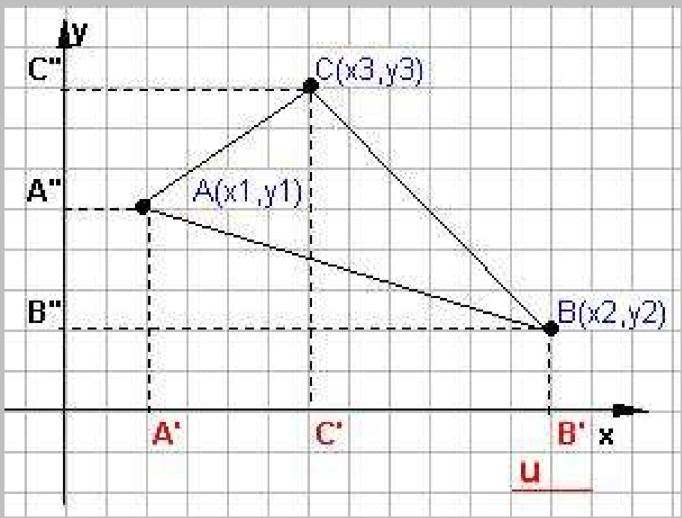
L'area di un triangolo determinabile mediante svariate formule, a seconda delle grandezze a noi note o ricavabili, cosi dalla classica $A_s = \frac{bxh}{2}$ alla formula di Erone noti i lati ed il semiperimetro $A_s = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ , ma in questo ambito sfrutteremo soltanto le coordinate dei punti dati.




Consideriamo il caso di figura a lato con il triangolo ABC con il lato AC parallelo all'asse x.
Siano A($x_1$,$y_1$) ; B($x_2$,$y_2$) ; C($x_3$,$y_3$) i tre vertici dove $y_3 = y_1$ ne consegue:

$$A_s = \frac{bxh}{2} = \left|\frac{CAxBH}{2}\right| = \left|\frac{(x_1 - x_3)(y_2 - y_3)}{2}\right|$$

Caso risolto sfruttando la formula generale applicando le coordinate dei punti dati in valore assoluto.




Nel caso generale, poi, si può procedere in vari modi , o decomponendo il triangolo dato in due triangoli con la base parallela all'asse x, oppure considerando i trapezi

1) AA'C'C
2) CC'BB'
3) AA'BB'

Ne consegue che l'area del triangolo ABC è ottenibile mediante:

$$S_{ABC} = |S_{AA'C'C} + S_{CC'BB'} - S_{AA'BB}|,$$

Calcoliamo singolarmente le varie aree considerando le coordinate dalla figura:

$$S_{AA'C'C} = \frac{1}{2}(AA' + C'C)(C'A') = \frac{1}{2}(y_1 + y_3)(x_3 - x_1)$$

$$S_{CC'BB'} = \frac{1}{2}(CC' + BB')(B'C') = \frac{1}{2}(y_3 + y_2)(x_2 - x_3)$$

$$S_{AA'BB'} = \frac{1}{2}(AA' + BB')(B'A') = \frac{1}{2}(y_1 + y_2)(x_2 - x_1)$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}\left|(y_1 + y_3)(x_3 - x_1) + (y_3 + y_2)(x_2 - x_3) + (y_1 + y_2)(x_2 - x_1)\right|$$

Con facili calcoli algebrici ed ordinando rispetto alle ascisse si ottiene:

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}\left|x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)\right|$$

Mentre ordinando rispetto alle ordinate avremmo ottenuto:

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}\left|y_1(x_3 - x_2) + y_2(x_1 - x_3) + y_3(x_2 - x_1)\right|$$

Quindi: l'area del triangolo è data dalla metà della somma dei prodotti delle ascisse dei tre vertici ordinatamente per le differenze delle ordinate; oppure dalla semisomma dei prodotti delle ordinate dei tre vertici ordinatamente per le differenze delle ascisse degli altri due vertici.
La superficie del triangolo può risultare positiva o negativa, ma la si riterrà sempre in valore assoluto. Quando risultasse S = 0, la formula considerata esprime, per mezzo del secondo membro, la condizione affinché tre punti siano allineati, oppure due punti coincidano, o infine quando tutti e tre siano coincidenti.

## Area di un triangolo secondo approccio

Per affrontare quest'altra modalità di risoluzione, dobbiamo ricordarci come abbiamo risolto i sistemi di primo grado con il metodo di Kramer, dove definivamo matrice quadrata del 2° ordine il simbolo $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ dati quattro numeri a, b, c, d.

Inoltre definivamo determinante della matrice data, e si indica con il simbolo $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ il numero ad – cb, di conseguenza:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - cb$$

Premesse queste definizioni, è possibile dimostare che l'area del triangolo di vertici $A(x_1,y_1)$ ; $B(x_2,y_2)$ ; $C(x_3,y_3)$ è data dalla relazione:

$$S = \pm\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \end{vmatrix}$$

Dove davanti al determinante considereremo il segno positivo o negativo, a seconda che il suo valore sia positivo o negativo.

## Area di un triangolo terzo approccio (formula di Sarrus)

Per introdurre quest'ulteriore modalità facciamo riferimento al concetto di matrice quadrata del terzo ordine un quadro del tipo $\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix}$ dati i numeri $a_1$, $a_2$, $a_3$, $b_1$, $b_2$, $b_3$, $c_1$, $c_2$, $c_3$.

Ebbene in generale è detto determinante lo sviluppo di una matrice quadrata di ordine n, così ottenuto: si sopprime la riga di posto i e la colonna di posto k che si incrociano nell'elemento $a_{ik}$, ottenendo così una matrice di ordine n – 1 detta minore complementare dell'elemento considerato. Il valore di tale minore va preso con il segno positivo o negativo, secondo che i + k è dispari o pari detto complemento algebrico.
I calcoli sono laboriosi, di conseguenza è meglio ricordare una regola pratica di procedura codificata: il valore del determinante si ottiene moltiplicando gli elementi di qualsiasi linea, ad esempio una riga, per i propri complementi algebrici e sommandone i risultati.

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 \begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} - a_2 \begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix} =$$

$$= a_1(b_2c_3 - b_3c_2) - a_2(b_1c_3 - b_3c_1) + a_3(b_1c_2 - b_2c_1) =$$
$$= a_1b_2c_3 + a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2 - a_1b_3c_2 - a_2b_1c_3 - a_3b_2c_1$$

Ne consegue che per calcolare l'area del triangolo di vertici $A(x_1,y_1)$ ; $B(x_2,y_2)$ ; $C(x_3,y_3)$ è possibile costruire il quadro matriciale di terzo ordine del tipo:

$$S = \pm\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = \pm\frac{1}{2}\left|x_1(y_2 - y_3) - x_2(y_1 - y_3) + x_3(y_1 - y_2)\right|$$

Ritrovando ancora la formula del paragrafo precedente.

REGOLA DI SARRUS
Infine esiste un altro modo per la risoluzione rapida del determinante del terzo ordine, detto regola di Sarrus, che consiste nel trascrivere a destra della matrice stessa le sue prime due colonne, procedendo poi come nell'esempi, dati i tre vertici del triangolo $A(x_1,y_1)$ ; $B(x_2,y_2)$ ; $C(x_3,y_3)$:

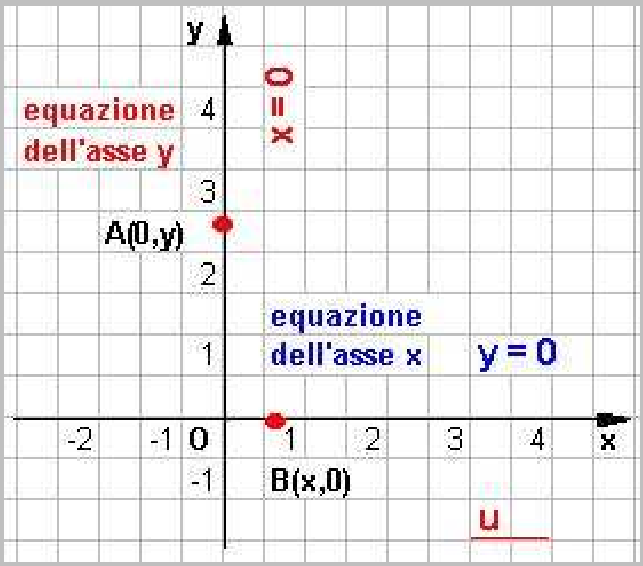
$$A = \frac{1}{2}\left\|\begin{matrix} x_1 & y_1 & 1 & x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 & 1 & x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 & 1 & x_3 & y_3 \end{matrix}\right\| = \frac{1}{2}\left[\left(x_1y_2 1 + y_1 1 x_3 + 1 x_2 y_3\right) - \left(1 y_2 x_3 + x_1 1 y_3 + y_1 x_2 1\right)\right]$$

– – – + + +

## La retta

Fissato un sistema di assi cartesiani ortogonali xOy una qualsiasi retta r, è un luogo geometrico, definito dall'equazione lineare (I° grado) nelle variabili x ed y. Si vuole determinare, quindi, la relazione algebrica che intercorre tra le coordinate x e y di un generico punto P appartenente ad r.
Allo scopo incominciamo a considerare rette in posizioni particolari rispetto agli assi e a determinarne le corrispondenti equazioni.

## Equazioni degli assi




**L'asse delle ascisse** è il luogo dei punti del piano aventi ordinata nulla per cui, tale asse, è rappresentato dall'equazione:

**y = 0**

che è soddisfatta da tutti e soli i suoi punti P(x,0).

**L'asse delle ordinate** è il luogo dei punti aventi ascissa nulla per cui, tale asse, è rappresentato dalla equazione:

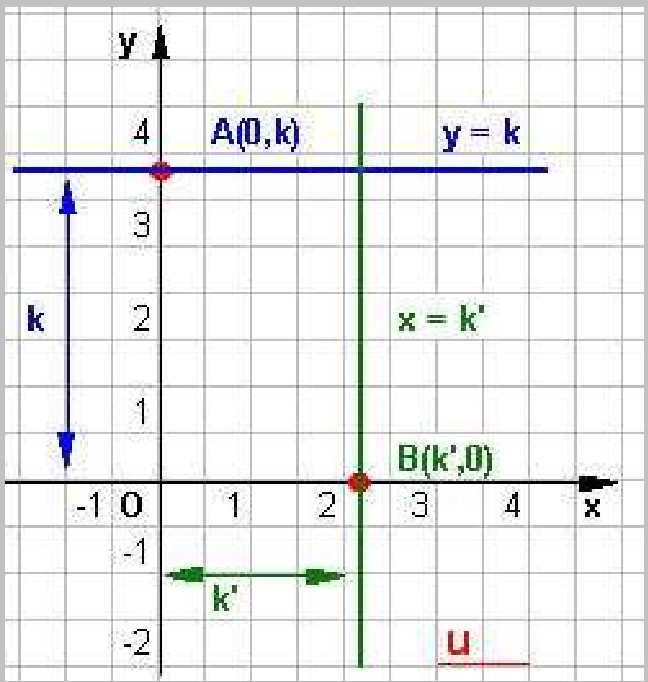
**x = 0**

che è soddisfatta da tutti e soli i suoi punti Q(0,y).

Riassumendo:

| | |
|---|---|
| **eq. asse x** | **y = 0** |
| **eq. asse y** | **x = 0** |

## Equazioni delle rette parallele agli assi




### Retta parallela all'asse delle x

Sia r una **retta parallela all'asse x** ed A(0,k) un punto ad essa appartenente. Tutti i suoi punti hanno uguale ordinata k, per cui la retta è rappresentata dalla equazione:

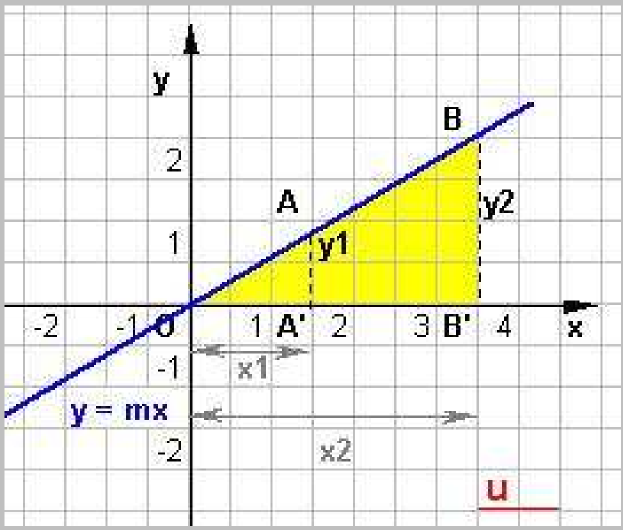
**y = k**

### Retta parallela all'asse delle y

Sia t una **retta parallela all'asse y** e B(k',0) un punto ad essa appartenente. Tutti i suoi punti hanno la stessa ascissa k', per cui la retta è rappresentata dalla equazione:

**x = k'**

## Retta passante per l'origine




La retta r passante per l'origine è il luogo dei punti tali che è costante il rapporto tra l'ordinata e l'ascissa.
Siano $A(x_1,y_1)$ e $B(x_2,y_2)$ due punti generici della retta r, distinti dall'origine; siano A' e B' le loro proiezioni ortogonali sull'asse x. I triangoli OAA' e OBB' sono simili e si ha pertanto la seguente proporzione :

$$\frac{AA'}{OA'} = \frac{BB'}{OB'} \quad \text{passando alle misure} \quad \frac{y_1}{x_1} = \frac{y_2}{x_2}$$

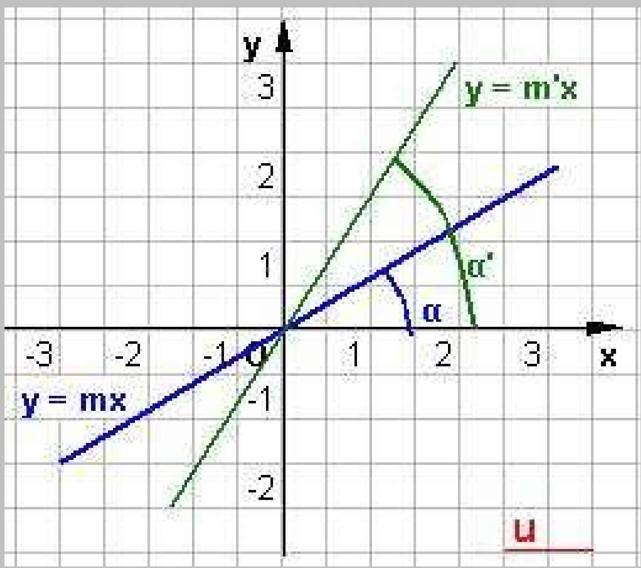
Possiamo allora concludere che se **m** è il valore costante di tale rapporto ed il generico punto della retta ha coordinate (x,y), la relazione esistente tra le coordinate è

$$\frac{y}{x} = m$$

( x diverso da 0), ossia **y = mx** (1)

La (1) è dunque l'equazione del luogo dei punti con ordinata proporzionale all'ascissa, secondo un opportuno coefficiente **m** detto **coefficiente angolare** della retta.

## Il coefficiente angolare m



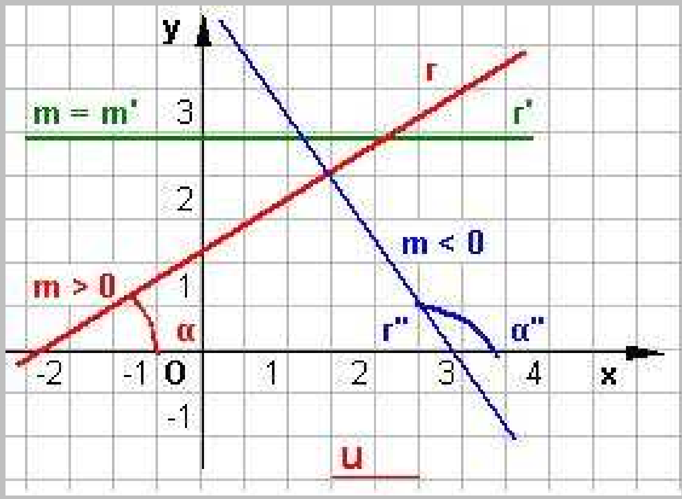

Alla costante **m** si dà il nome di **coefficiente angolare della retta r**. Tale coefficiente angolare dipende dall'angolo **α** formato dalla retta r e dal semiasse positivo delle x quando questo ruota in senso antiorario fino a sovrapporsi alla retta.

Quindi esso varia al variare dell’inclinazione della retta rispetto agli assi.
Più precisamente:

1) Per m = 0 l’angolo è piatto e la retta è parallela all’asse x.

2) Per m > 0 la funzione y = mx + q è crescente; cioè, percorrendo la retta nel verso delle ascisse crescenti , si vedono crescere le ordinate, ciò equivale a dire che la porzione di retta situata nel semipiano del i° e II° quadrante forma un angolo acuto **α** con la direzione positiva dell’asse x. Inoltre, **α** è tanto più grande quanto maggiore è m.

3) Per m < 0 la funzione y = mx + q è decrescente; cioè percorrendo la retta nel senso delle ascisse crescenti , si vedono decrescere le ordinate, ciò equivale a dire che la porzione di retta situata nel semipiano i° e II° quadrante forma un angolo ottuso **α’’** con la direzione positiva dell’asse x. Inoltre, **α’’** è tanto più grande quanto maggiore è m; cioè quanto minore è il valore assoluto di m.




Riassumendo:

Se l'angolo è acuto si ha **m > 0**;
se l'angolo è ottuso, **m < 0**;
se l'angolo è nullo o piatto, **m = 0**;
se l'angolo è retto non è definito il coefficiente angolare m.

Considerata l'equazione y = mx, per m = 1 e m = – 1 si ottengono le equazioni:

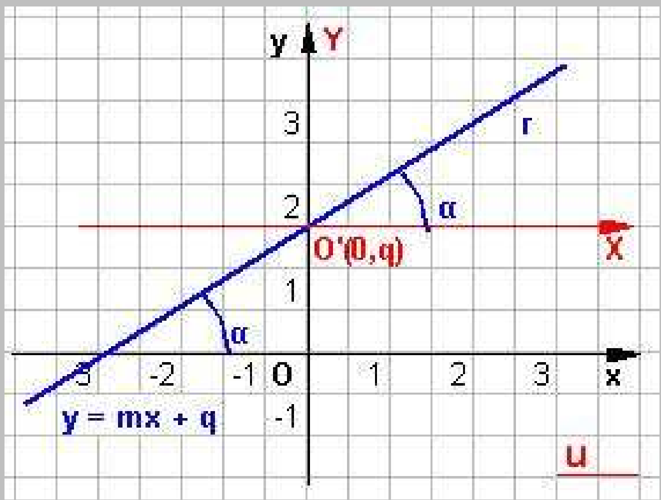
**y = x , y = – x**

che rappresentano rispettivamente **le bisettrici** del I° e III° quadrante e del II° e IV° quadrante. In questo caso gli angoli sono di ampiezza rispettivamente 45° e 135°.
Se $P(x_1,y_1)$ e $Q(x_2,y_2)$ sono due punti appartenenti ad una retta, non parallela all'asse delle y, il coefficiente angolare della retta può essere immediatamente calcolato applicando la seguente formula:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

avendo supposto $x_1$ diverso da $x_2$ .

## Retta in posizione generica




Sia r una retta non passante per l'origine e non parallela agli assi.

Si consideri la traslazione t che trasferisce l'origine degli assi nel punto O'. Si osserva che la retta r ha la stessa pendenza e quindi lo stesso coefficiente angolare rispetto ai due sistemi di riferimento xOy e XO'Y. Nel sistema **XO'Y** la retta r passa per l'origine O' ed ha equazione :

Y = mX

applicando la traslazione inversa t' si ottiene l'equazione di r nel sistema **xOy**:

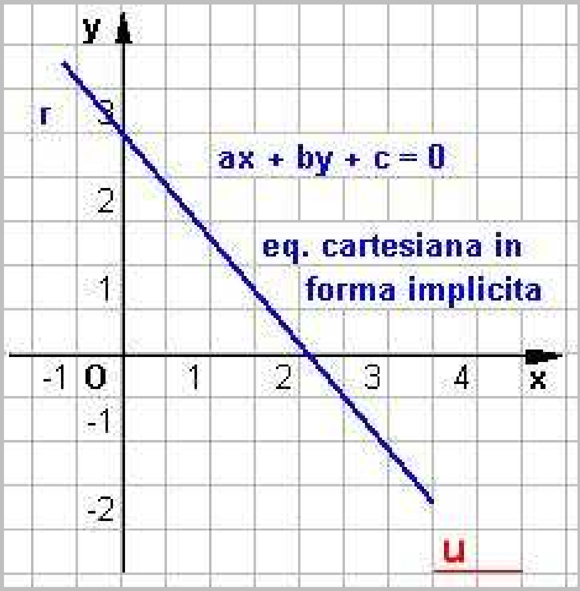
y – q = mx

da cui y = mx + q.

La **y = mx + q** (2)

è l'**equazione di una generica retta nel piano** dove:
**m** è il coefficiente angolare,
**q** è detta **ordinata all'origine**, in quanto rappresenta l'ordinata del punto di intersezione della retta con l'asse delle ordinate.
La (2) viene chiamata **equazione della retta in forma esplicita**.

## Equazione cartesiana della retta




L'equazione lineare in due variabili x,y del tipo:

**ax + by + c = 0** (3)

rappresenta al variare di a, b, c reali, con a e b non entrambi nulli, una qualsiasi retta del piano.

La (3) si dice **equazione cartesiana della retta** o equazione generale della retta **in forma implicita**. Il coefficiente c prende il nome di termine noto.

Analizziamo i vari casi possibili:

1) a, b , c diversi da zero

Dividendo tutto per b si ottiene la forma esplicita:

$$y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$$

Tale equazione rappresenta una retta di coefficiente angolare ed ordinata all'origine rispettivamente uguali a: $m = -\frac{a}{b}$ $q = -\frac{c}{b}$ quindi l'equazione diventa:

**y = mx + q**

che è detta **equazione della retta in forma esplicita**.

2) a, b diversi da 0, c = 0

la (3) assume la forma **ax + by = 0** ovvero $y = -\frac{a}{b}x$ che è l'equazione di una retta per l'origine. Posto $m = -\frac{a}{b}$

l'equazione diventa: **y = mx.**

3) a = 0, b e c diversi da 0

la 3) diventa **by + c = 0** ovvero $y = -\frac{c}{b}$ che rappresenta una retta parallela all'asse x;

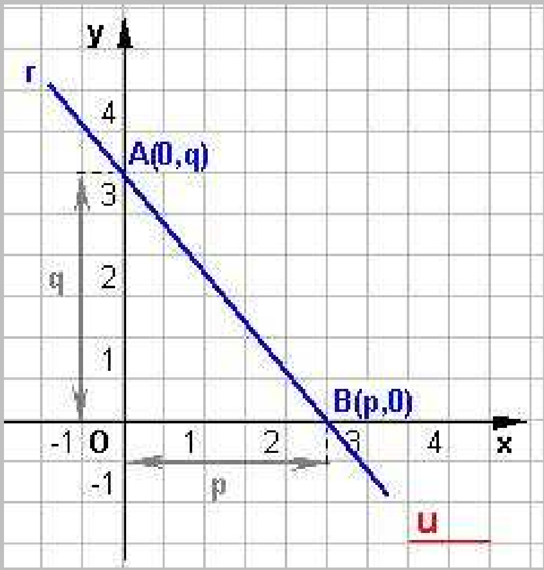
4) a, c diversi da 0 e b = 0

la 3) diviene **ax + c = 0** ovvero $x = -\frac{c}{a}$ che rappresenta una retta parallela all'asse y.

**Osservazione:**

L'equazione di una retta in forma implicita rappresenta tutte le rette del piano a differenza dell'equazione in forma esplicita che non rappresenta le rette parallele all'asse y e l'asse y.

## Equazione segmentaria della retta




Sia r una retta non parallela agli assi cartesiani e non passante per l'origine. Essa taglia gli assi in due punti distinti B(p,0) e A(0,q). Le misure dei segmenti orientati che la retta stacca sugli assi cartesiani si chiamano **intercette** della retta.
Noti p e q è possibile determinare l'equazione della retta applicando la seguente relazione:

$$\frac{x}{p}+\frac{y}{q}=1$$

Questa equazione si dice **equazione segmentaria della retta.**

Otteniamola partendo dall'equazione

ax + by + c = 0 trasformiamola opportunamente in
ax + by = – c da cui

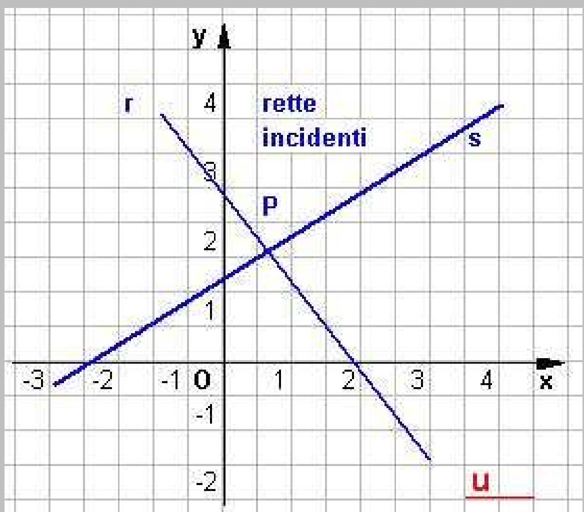
— ax – by = c ed ancora $-\frac{a}{c}x-\frac{b}{c}y=1$ cioè $\frac{x}{-\frac{c}{a}}+\frac{y}{-\frac{c}{b}}=1$

Si osservi che $-\frac{c}{a}$ è la lunghezza algebrica del segmento che la retta stacca, a partire dall'origine, sull'asse delle x e $-\frac{c}{b}$ la lunghezza di quello che essa stacca, sempre a partire dall'origine, sull'asse delle y. Indicando tali lunghezze con p e q abbiamo la formula iniziale.

## Posizione reciproca di due rette

Siano ax + by + c = 0 e a'x + b'y + c'= 0 le equazioni cartesiane delle due rette r ed s.

## Rette incidenti




Due rette si dicono incidenti quando si intersecano in un punto. Il problema geometrico di determinare l'eventuale punto di incontro delle due rette si riconduce alla risoluzione del sistema :

$$\begin{cases} a\,x + b\,y + c = 0 \\ a'x + b'y + c' = 0 \end{cases}$$

Se $\frac{a}{a'}\neq\frac{b}{b'}$

il sistema ammette una ed una sola soluzione coincidente con il punto di intersezione delle due rette.

Se $\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}\neq\frac{c}{c'}$

il sistema è impossibile cioè le rette sono parallele e distinte.

Se $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$ il sistema è indeterminato cioè si hanno rette coincidenti .

**Risoluzione grafica di un sistema di primo grado di due equazioni in due incognite, considerazioni generali.**

Studiamo il sistema generico

$$\begin{cases} a\,x + b\,y + c = 0 \\ a'x + b'y + c' = 0 \end{cases}$$

La soluzione grafica è data dalla rappresentazione dei diagrammi delle equazioni del sistema, le coordinate del loro punto d'intersezione daranno la soluzione cercata.
La soluzione algebrica che si ottiene applicando la regola di Kramer nell'ipotesi che sia :

$$\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} = ab' - a'b \neq 0 \quad \text{da cui} \quad x = -\frac{\begin{vmatrix} -c & b \\ -c' & b' \end{vmatrix}}{ab' - a'b} = \frac{bc' - b'c}{ab' - a'b} \qquad y = -\frac{\begin{vmatrix} a & -c \\ a' & -c' \end{vmatrix}}{ab' - a'b} = \frac{a'c - ac}{ab' - a'b}$$

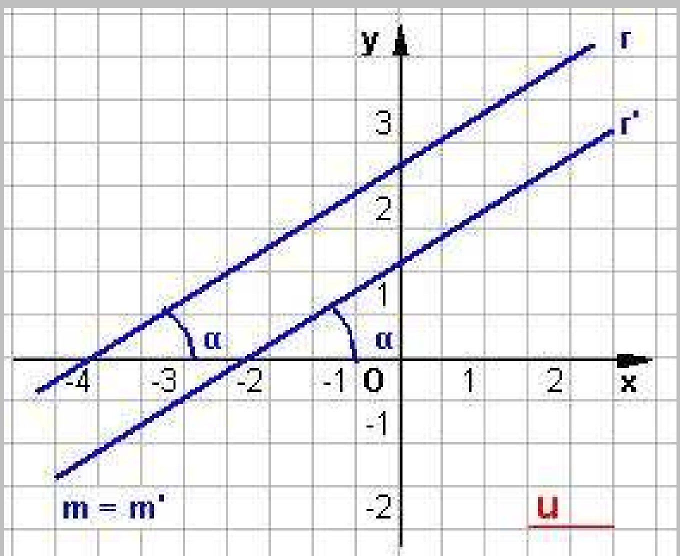
Sono di particolare interesse le seguenti osservazioni :

1) Supposto ab'– a'b ≠ 0, le rette del grafico delle equazioni del sistema hanno uno ed un sol punto in comune, d'accordo col fatto che il sistema è determinato.

2) Supposto ab'– a'b = 0 e bc' – b'c ≠ 0 e quindi anche a'c – ac'≠ 0 notando che è a/b = a'/b'
Le rette, grafico delle equazioni del sistema non hanno punti in comune, essendo parallele, d'accordo col fatto che il sistema è impossibile.

3) Supposto ab'– a'b = 0 e bc' – b'c = 0 e quindi anche a'c – ac'= 0
Le due rette, grafico delle equazioni del sistema sono coincidenti, d'accordo col fatto che il sistema è indeterminato.

## Rette parallele. Condizione di parallelismo




*Condizione necessaria e sufficiente affinchè due rette siano parallele è che abbiano lo stesso coefficiente angolare:*

**m = m'** .

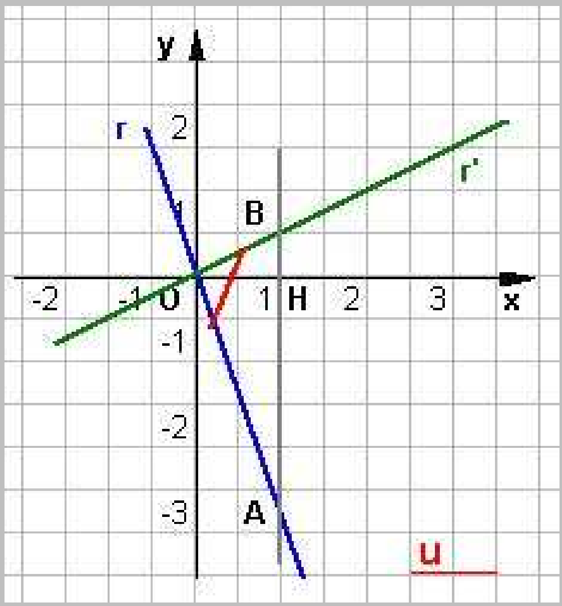
In termini algebrici ciò equivale ad affermare che **i coefficienti delle incognite nell'equazione di una retta devono essere proporzionali** ai coefficienti corrispondenti nell'equazione dell'altra retta.

Osservando il grafico si nota che le due rette hanno la stessa pendenza, infatti gli angoli che esse formano con la direzione positiva dell'asse delle x sono uguali $\alpha = \alpha'$.
Si deduce che **m = m'**.

Cioè essendo $m = -\frac{a}{b}$ e $m' = -\frac{a'}{b'}$ si ha pure $\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'}$
come già affermato dimostra la proporzionalità dei coefficienti

## Rette perpendicolari. Condizione di perpendicolarità

Siano s ed s' due rette generiche date, perpendicolari, di equazione rispettivamente:




$y = mx + q$ e $y' = m'x + q'$.

Si considerino le rette r ed r', parallele alle date e passanti per l'origine di equazioni:

$$y = mx \quad e \quad y = m'x.$$

Siano A(1,–m) e B(1,m') i punti di intersezione delle rette s ed s' con la retta $x = 1$.

Passando alle misure si ha: $HA = -m$, $HB = m'$.

Inoltre applicando il teorema di Euclide al triangolo rettangolo AOB, si ha:

$$HA \bullet HB = OH^2$$

$$-m\,m' = 1 \quad \text{ossia} \quad m\,m' = -1$$

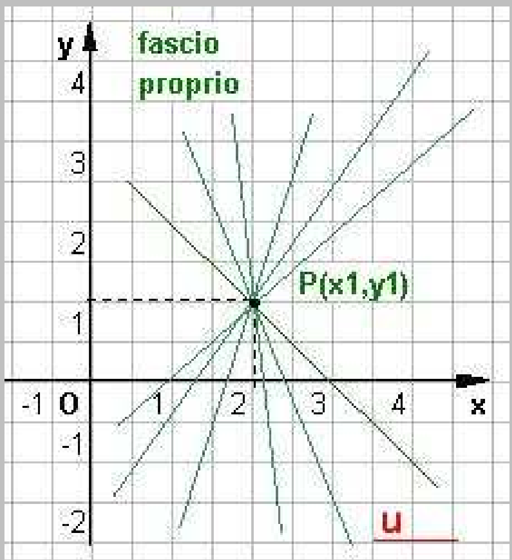
$$\text{quindi} \quad m = -\frac{1}{m'}$$

Dunque:
*Condizione necessaria e sufficiente affinchè due rette siano perpendicolari è che i loro coefficienti angolari siano fra loro antireciproci.*

## Fasci di rette

### Fascio proprio di rette

Si definisce fascio proprio di rette l'insieme di tutte e sole le rette di un piano che hanno uno stesso punto in comune, detto centro del fascio.




Se $P(x_1,y_1)$ è il centro del fascio, l'equazione:

(1) $y - y_1 = m(x - x_1)$

rappresenta l'insieme di tutte le rette passanti per il punto P.

La (1) si chiama **equazione del fascio proprio di centro $P(x_1,y_1)$.**

L'equazione (1) non comprende tutte le rette del fascio di centro P; manca, infatti, la retta passante per P e parallela all'asse delle y.
Comprende, invece, tutte le rette del fascio di centro P l'equazione

$$a(x - x_1) + b(y - y_1) = 0$$

ottenuta dalla precedente, ponendo $m = -\frac{a}{b}$.

Infine, se si hanno le rette r ed s di equazioni rispettivamente

$ax + by + c = 0$ e $a'x + b'y + c'= 0$ incidenti in un punto P, il fascio di rette da esse individuato

è $$\lambda(ax + by + c)+ \mu(a'x + b'y + c') = 0$$

con $\lambda$ e $\mu$ parametri reali non entrambi nulli. Se $\lambda = 0$ si ottiene la retta r se $\mu = 0$ si ottiene la retta s. Le rette r ed s sono dette **generatrici del fascio**.

Supponendo $\lambda$ diverso da 0 e dividendo per $\lambda$, l'equazione del fascio diventa

$$ax + by + c + k(a'x + b'y + c') = 0 \qquad \text{ove } k = \mu / \lambda.$$

In questo caso la retta r si ottiene per k = 0 , la retta s si ottiene per k tendente all'infinito.

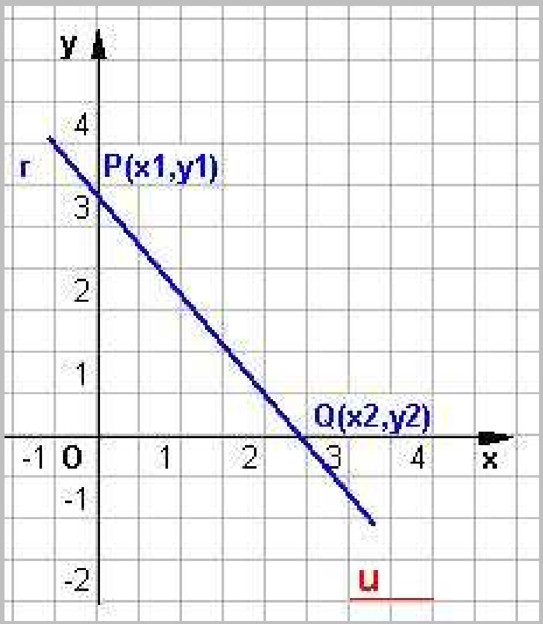
## Fascio improprio di rette

Si dice fascio improprio di rette l'insieme delle rette di un piano parallele ad una retta data.
Data una retta r di equazione $ax + by + c = 0$

ogni altra retta di equazione del tipo : $ax + by + k = 0$

è parallela alla retta data. Al variare di k si hanno **tutte** le rette del fascio improprio individuato dalla retta r. Si riconosce il fascio improprio di rette quando, ridotta l'equazione a forma esplicita, il parametro k e figura soltanto a termine noto. La retta del fascio passante per l'origine si dice **retta base** del fascio improprio.

## Equazione della retta passante per due punti




Siano $P(x_1,y_1)$ e $Q(x_2,y_2)$ due punti riferiti al piano cartesiano xOy, con $x_1$ diverso da $x_2$ e $y_1$ diverso da $y_2$.

La equazione della retta passante per P e Q si ottiene scrivendo l'equazione del fascio centrato in P con coefficiente angolare uguale a quello della retta PQ

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

Dividendo ambo i membri per $y_2 - y_1 \neq 0$ si ottiene:

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \qquad (*)$$

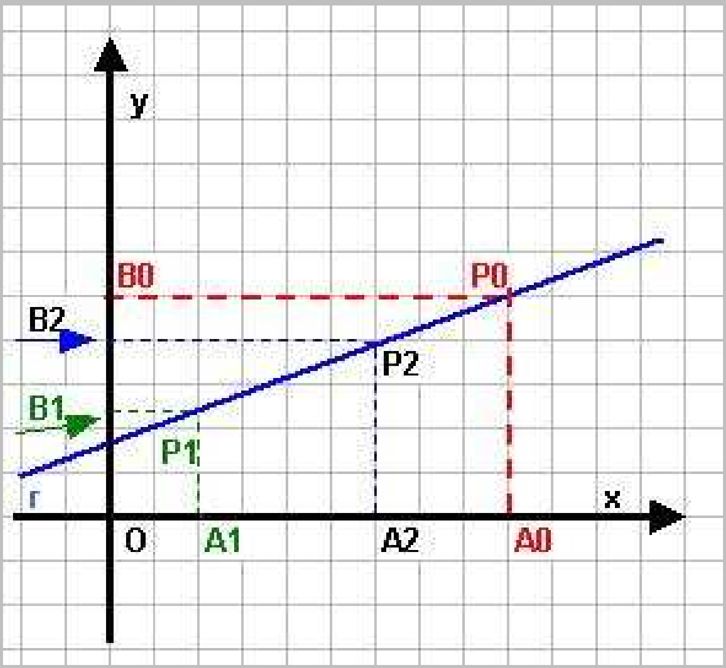
che è l'equazione della retta passante per due punti.

2° Modo di introdurre la formula della retta passante per due punti.

Consideriamo, ora, una retta r **non parallela ad alcun asse coordinato**.

Su tale retta prendiamo due punti, arbitrari e distinti , $P_1(x_1,y_1)$ e $P_2(x_2,y_2)$ che, come è noto , individuano la retta r.

Preso, ora un qualsiasi altro punto $P_0(x_0,y_0)$, diverso da $P_1$ e $P_2$, e detti $A_1$,$A_2$, $A_0$ e $B_1$, $B_2$, $B_0$, le proiezioni ortogonali di $P_1$, $P_2$ , $P_0$ , rispettivamente, sull'asse x e sull'asse y, per il teorema di Talete ( che afferma: un fascio di rette parallele determina su due trasversali due classi di segmenti direttamente proporzionali ), risulta anche in segno




$$\frac{A_1A_0}{A_1A_2}=\frac{P_1P_0}{P_1P_2}\ ;\quad \frac{B_1B_0}{B_1B_2}=\frac{P_1P_0}{P_1P_2}$$

da cui si ricava

$$\frac{A_1A_0}{A_1A_2}=\frac{B_1B_0}{B_1B_2}$$

Se $x_0$ e $y_0$ sono le coordinate di $P_0$, tenendo presente che:

$A_1A_0 = x_0 - x_1$ ; $A_1A_2 = x_2 - x_1$ ;
$B_1B_0 = y_0 - y_1$ ; $B_1B_2 = y_2 - y_1$ ;

La relazione precedente si può scrivere sotto la forma seguente :

$$\frac{x_0 - x_1}{x_2 - x_1}=\frac{y_0 - y_1}{y_2 - y_1}$$

da cui con facili calcoli si deduce:

$$\mathbf{(y_2 - y_1)x_0 - (x_1 - x_2)y_0 + x_2y_1 - x_1y_2 = 0}$$

Indicando brevemente con a, b, c, rispettivamente, i numeri noti $(y_2 - y_1)$; $(x_1 - x_2)$; $x_2y_1 - x_1y_2$ ; cioè posto:

$$a = (y_2 - y_1),\quad b = (x_1 - x_2),\quad c = x_2y_1 - x_1y_2$$

la relazione finale in forma implicita la si può scrivere sotto la forma :

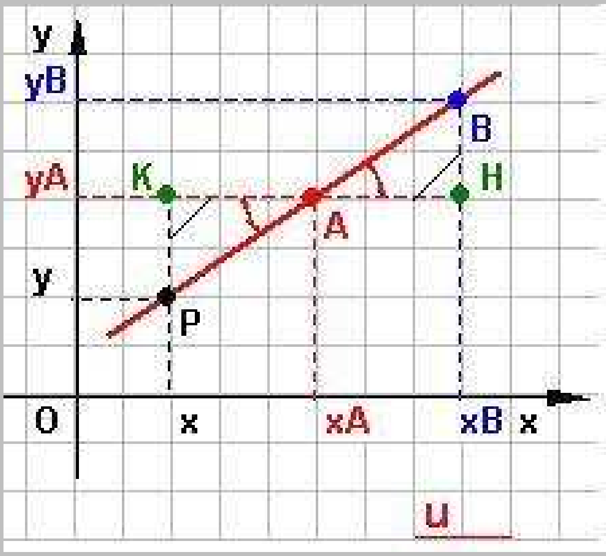
$$ax_0 + by_0 + c = 0.$$

Si vede così che le coordinate $(x_0,y_0)$ del punto $P_0$, della retta r, costituiscono una soluzione dell'equazione:

$$ax + by + c = 0.$$

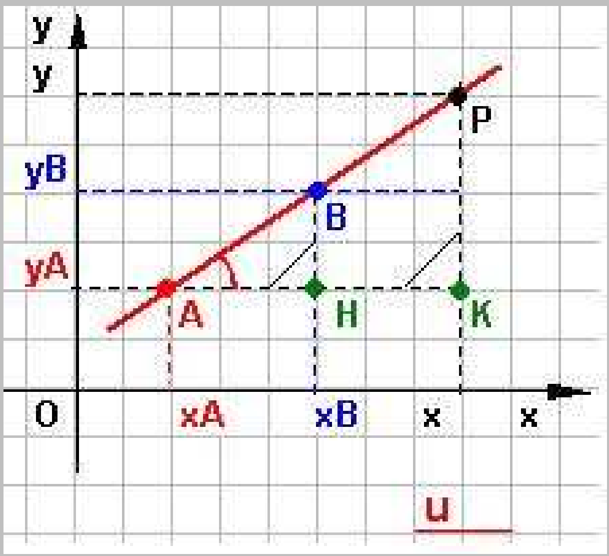
Infine si fa notare come la formula (*) ha carattere generale, comunque vengano disposti i punti nel piano cartesiano rispetto agli assi.Infatti il punto P è allineato con A e B se e solo se sono uguali gli angoli PAK e BAH, cioè se e solo se sono simili i triangoli PAK e BAH. Il che equivale a dire che P è allineato con i due punti se e solo se sussiste la proporzione:

$$\frac{KA}{HA}=\frac{PK}{BH}$$



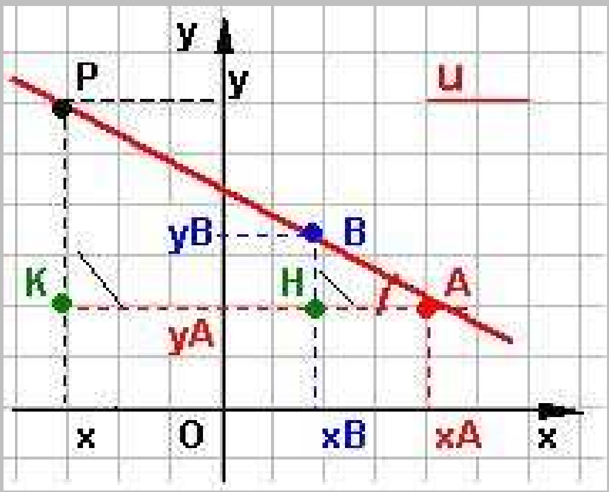

e nel caso della figura a lato abbiamo:

$$\frac{x_A - x}{x_B - x_A} = \frac{y_A - y}{y_B - y_A}$$



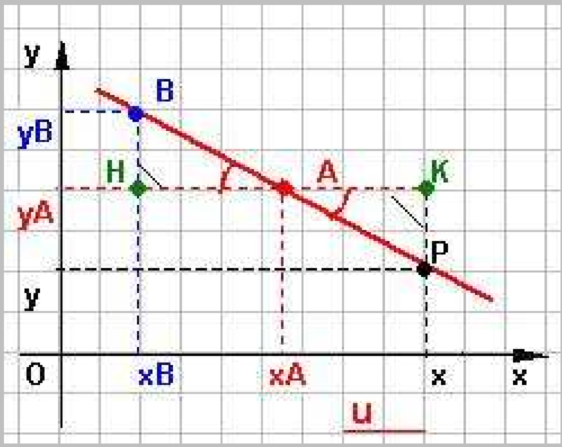

In questo secondo caso a lato abbiamo:

$$\frac{x - x_A}{x_B - x_A} = \frac{y - y_A}{y_B - y_A}$$




nel terzo caso qui a lato sussiste:

$$\frac{x_A - x}{x_A - x_B} = \frac{y - y_A}{y_B - y_A}$$

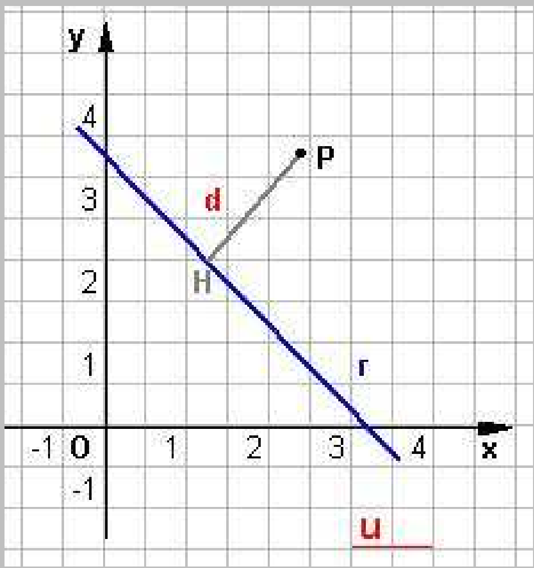



In quest'ultimo caso graficato avremo:

$$\frac{x - x_A}{x_A - x_B} = \frac{y_A - y}{y_B - y_A}$$

Tutte le uguaglianze sono riconducibili alla formula (*), che in questi esempi corrisponde al secondo caso, anche la prima cambiando di segno i due numeratori, la terza cambiando di segno i due termini della frazione a primo membro, l'ultima espressione infine, cambiando di segno il denominatore della frazione a primo membro ed il numeratore della frazione a secondo membro.

## Distanza di un punto da una retta




Data una generica retta r di equazione $ax + by + c = 0$, ed un punto $P(x_1,y_1)$ la distanza **d** di P dalla retta r è così calcolabile:

$$d = \frac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Se il punto P coincide con l'origine degli assi la distanza d è data da:

$$d = \frac{|c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

**Come fare**

Per calcolare la misura della distanza del punto $P(x_1,y_1)$dalla retta $ax + by + c = 0$, occorre scrivere l'equazione della retta per P perpendicolare alla data, trovare quindi le coordinate del punto Q d'intersezione della retta con tale perpendicolare ed infine la misura della distanza di P da Q.
La perpendicolare alla retta data per P é

$$\mathbf{b(x - x_1) - a\,(y - y_1) = 0}$$

Facendo sistema con la retta data

$$ax + by + c = 0$$

otteniamo

$$\begin{cases} b(x - x_1) - a\,(y - y_1) = 0 \\ ax + by + c = 0 \end{cases}$$

ricaviamo la x dalla 2^ equazione: $x = \dfrac{-by - c}{a}$ sostituiamola nella 1^ ottenendo:

$$b\left(\frac{-by - c}{a} - x_1\right) - a\,(y - y_1) = 0$$

Elaboriamo

$$\frac{-b^2y-bc}{a}-bx_1-ay+ay_1=0$$

$$-b^2y-bc-abx_1-a^2y+a^2y_1=0$$
$$y(a^2+b^2)=-abx_1+a^2y_1-bc$$

$$y=\frac{a^2y_1-abx_1-bc}{a^2+b^2}$$ valore della $y_Q$

Sostituendo nella 2^ equazione questo valore otteniamo il valore della $x_Q$

$$ax=\frac{-ba^2y_1-ab^2x_1-b^2c}{a^2+b^2}-c$$

$$ax=\frac{-ba^2y_1-ab^2x_1-b^2c-a^2c-b^2c}{a^2+b^2}$$

$$x=\frac{b^2x_1-bay_1-ac}{a^2+b^2}$$ valore della $x_Q$ cercato.

$$\mathbf{Q}=\left(\frac{b^2x_1-bay_1-ac}{a^2+b^2};\frac{a^2y_1-abx_1-bc}{a^2+b^2}\right)$$

La misura della distanza PQ dalla

$$PQ=\sqrt{(x_P-x_Q)^2+(y_P-y_Q)^2}=\sqrt{(x_1-x_Q)^2+(y_1-y_Q)^2}$$ avremo

$$PQ=\sqrt{\left(x_1-\frac{b^2x_1-bay_1-ac}{a^2+b^2}\right)^2+\left(y_1-\frac{a^2y_1-abx_1-bc}{a^2+b^2}\right)^2}=$$

$$=\sqrt{\left(\frac{a^2x_1+b^2x_1-b^2x_1+bay_1+ac}{a^2+b^2}\right)^2+\left(\frac{a^2y_1+b^2y_1-a^2y_1+abx_1+bc}{a^2+b^2}\right)^2}=$$

$$=\sqrt{\left(\frac{a^2x_1+aby_1+ac}{a^2+b^2}\right)^2+\left(\frac{abx_1+b^2y_1+bc}{a^2+b^2}\right)^2}=$$

$$=\sqrt{\frac{a^2(ax_1+by_1+c)^2}{(a^2+b^2)^2}+\frac{b^2(ax_1+by_1+c)^2}{(a^2+b^2)^2}}=\sqrt{\frac{(ax_1+by_1+c)^2(a^2+b^2)}{(a^2+b^2)^2}}=\frac{(ax_1+by_1+c)}{\sqrt{(a^2+b^2)}}$$

in definitiva per la misura della distanza considereremo il valore assoluto

$$PQ=\left|\frac{ax_1+by_1+c}{\sqrt{(a^2+b^2)}}\right|$$

L'espressione $\sqrt{a^2+b^2}$ si dice fattore normante relativo alla retta
ax + by + c = 0
In particolare la misura della distanza di una retta dall'origine è

$$d = \left| \frac{c}{\sqrt{(a^2+b^2)}} \right|$$

## Area di un triangolo (altro approccio)

Dopo aver studiato la retta, riproponiamo il calcolo dell'area di un triangolo, chiaramente ritrovando le stesse formule risolutive, ma con un approccio diverso.

Siano $A(x_1,y_1)$ ; $B(x_2,y_2)$ ; $C(x_3,y_3)$ i tre vertici, determiniamo innanzi tutto l'equazione di una retta passante per due punti dati $A(x_1,y_1)$ ; $B(x_2,y_2)$.
Se la retta passa per il punto $A(x_1,y_1)$, dovrà soddisfare alla condizione:

$$y - y_1 = m ( x - x_1)$$

Analogamente, se la stessa reta passa anche per il punto $B(x_2,y_2)$, dovrà ancora soddisfare alla condizione:

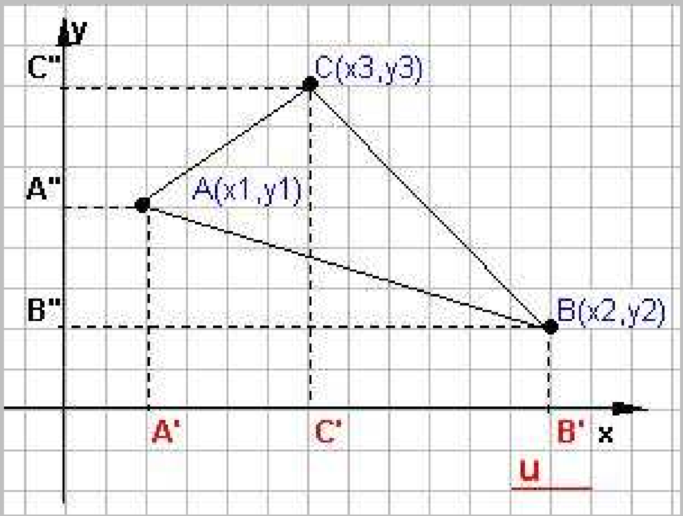
$$y - y_2 = m ( x - x_2)$$

Ricaviamo m, coefficiente angolare da ambedue le espressioni ed uguagliamo i valori così ottenuti, cosa lecita essendo la stessa retta,

$$\frac{y-y_1}{x-x_1} = \frac{y-y_2}{x-x_2}$$

Elaboriamo con facili passaggi algebrici questa espressione:

$$(y - y_1)(x - x_2) = (y - y_2)(x - x_1)$$




$$xy - xy_1 - x_2y + x_2y_1 = xy - xy_2 - x_1y + x_1y_2$$

e raccogliendo :

$$x(y_1 - y_2) + y (x_2 - x_1) + x_1y_2 - x_2y_1 = 0$$

Confrontiamo quest'ultima espressione con la ax + by + c = 0, formula della retta implicita, ebbene si riconosce essere:
$a = y_1 - y_2$ , $b = x_2 - x_1$ , $c = x_1y_2 - x_2y_1$ .

Quindi è possibile calcolare la distanza fra il punto $C(x_3,y_3)$ e la retta determinata, per la formula del precedente paragrafo possiamo scrivere:

$$d = \left| \frac{ax_1+by_1+c}{\sqrt{(a^2+b^2)}} \right| = \left| \frac{(y_1-y_2)x_3+(x_2-x_1)y_3+x_1y_2-x_2y_1}{\sqrt{(y_1-y_2)^2+(x_2-x_1)^2}} \right|$$

quantità che esprime l'altezza del triangolo dato,non resta che determinare la base data dalla lunghezza del segmento che ha per estremi i punti di coordinate A($x_1$,$y_1$) ; B($x_2$,$y_2$), cioè:

$$\mathrm{AB} = \sqrt{(y_1 - y_2)^2 + (x_2 - x_1)^2}$$

Quindi l'area del triangolo sarà: $A_s = \frac{bxh}{2}$ e nel nostro caso:

$$\mathrm{S_{ABC}} = \frac{1}{2}\left|\frac{(y_1 - y_2)x_3 + (x_2 - x_1)y_3 + x_1 y_2 - x_2 y_1}{\sqrt{(y_1 - y_2)^2 + (x_2 - x_1)^2}}\right| \sqrt{(y_1 - y_2)^2 + (x_2 - x_1)^2}$$

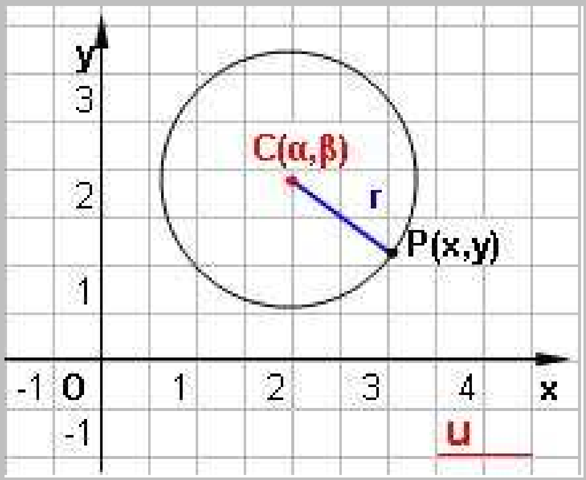
Dopo lo sviluppo algebrico ritroveremo come nel capitolo precedente le due formule a seconda che si ordini o rispetto le ascisse o alle ordinate, sempre in valore assoluto:

$$\mathrm{S_{ABC}} = \frac{1}{2}|x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)|$$

$$\mathrm{S_{ABC}} = \frac{1}{2}|y_1(x_3 - x_2) + y_2(x_1 - x_3) + y_3(x_2 - x$$

## Circonferenza: definizione analitica

La **circonferenza** è una conica definita come il luogo dei punti del piano equidistanti da un punto fisso detto centro.




Fissato nel piano un sistema di assi cartesiani ortogonali xOy, la circonferenza di centro **C(α,β)** e raggio r è l'insieme dei punti **P(x,y)** tali che risulta verificata la relazione:

$$PC = \mathbf{r} \quad \text{ovvero} \quad PC^2 = r^2.$$

Poichè :

$$PC = (x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2,$$

il punto P(x,y) apparterrà alla circonferenza soltanto se le sue coordinate soddisfano l'equazione

$$(1) \qquad (x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = r^2.$$

La (1) rappresenta l'equazione della circonferenza, noto il centro **C(α,β)** ed il raggio **r**.
Nel caso particolare in cui il centro C coincide con l'origine degli assi, essendo $\alpha = \beta = 0$, la (1) diventa

$$(2) \qquad x^2 + y^2 = r^2 .$$

La (2) si dice equazione della circonferenza centrata nell'origine degli assi con raggio r.
Sviluppando l'equazione (1) si ottiene:
ovvero, ponendo

$$-2\alpha = a; \qquad -2\beta = b; \qquad \alpha^2 + \beta^2 - r^2 = c ,$$

si ottiene:

$$(3) \quad x^2 + y^2 + a x + by + c = 0 ,$$

che si dice **equazione in forma normale o canonica della circonferenza**.

E' una equazione di secondo grado in x e y, mancante del termine contenente il prodotto xy (*termine rettangolare*) e con i coefficienti di $x^2$ e $y^2$ uguali ad uno.

Nota l'equazione canonica della circonferenza è possibile determinare le coordinate del centro e la lunghezza del raggio applicando le seguenti formule:

$$C = \left(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2}\right) \qquad\qquad r = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2 - c} = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2 - 4c}$$

Esaminiamo la formula che determina il valore di r, si distinguono tre diversi casi per l'equazione del tipo $\qquad (3) \qquad x^2 + y^2 + a x + by + c = 0.$

| | |
|---|---|
| I°) se $\mathbf{a^2 + b^2 - 4c > 0}$ | la (3) rappresenta una circonferenza reale ed infiniti sono i punti che appartengono al luogo da essa individuato. |
| II°) se $\mathbf{a^2 + b^2 - 4c = 0}$ | la (3) rappresenta una circonferenza di raggio nullo e pertanto al luogo da essa individuato appartiene un solo punto, che è poi, il centro della circonferenza ( circonferenza degenere). |
| III°) se $\mathbf{a^2 + b^2 - 4c < 0}$ | la (3) rappresenta una circonferenza reale, non esiste pertanto alcun punto del piano cartesiano le cui coordinate la soddisfano. |

## Studio dell'equazione canonica

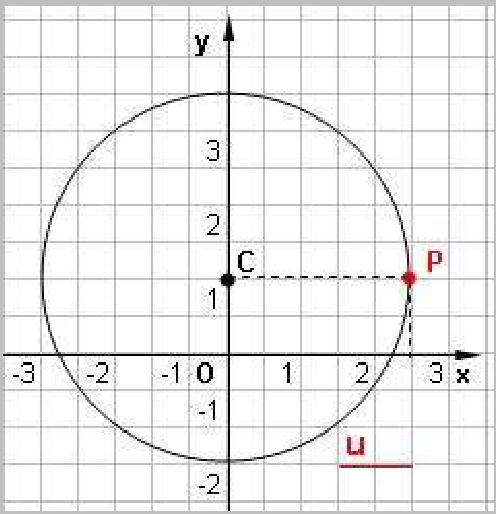
Data l'equazione canonica della circonferenza

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0 \qquad (1)$$

in base ai valori assunti dai coefficienti a, b, c la circonferenza assume una particolare posizione rispetto agli assi.

1) se **a = 0** la circonferenza ha il centro sull'asse y.

Infatti, le coordinate del centro risultano (0,– b/2).
Infatti come dalla fig.:




Dati **C(0,1)** ; **P(5/2,1)** ed

$$r = d = CP = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

pari a

$$r = \sqrt{\left(\frac{5}{2} - 0\right)^2 + (1-1)^2} = \sqrt{\frac{25}{4}} = \frac{5}{2}$$

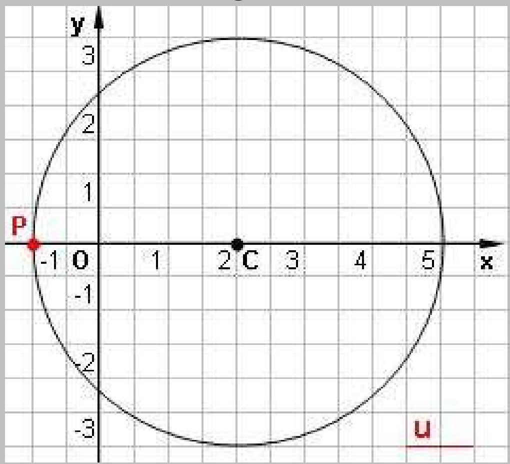
Applicando la formula **$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = r^2$**
abbiamo

$$(x - 0)^2 + (y - 1)^2 = 25/4$$
$$x^2 + y^2 - 2y + 1 - 25/4 = 0$$
$$\mathbf{x^2 + y^2 - 2y - 21/4 = 0} \quad \textbf{C.V.D.}$$

Controllo

$$r = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2 - c} = \sqrt{1 + \frac{21}{4}} = \frac{5}{2}$$

2) se **b = 0** la circonferenza ha il centro sull'asse x.
Infatti, le coordinate del centro risultano (– a/2,0).
Infatti come dalla fig.:




Dati **C(2,0)** ; **P(0,–1)** ed

$$r = d = CP = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

pari a

$$r = \sqrt{(2+1)^2 + (0-0)^2} = \sqrt{9} = 3$$

Applicando la formula **$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = r^2$**
abbiamo

$$(x - 2)^2 + (y - 0)^2 = 9$$
$$\mathbf{x^2 + y^2 - 4x - 5 = 0} \qquad \textbf{C.V.D.}$$

Controllo

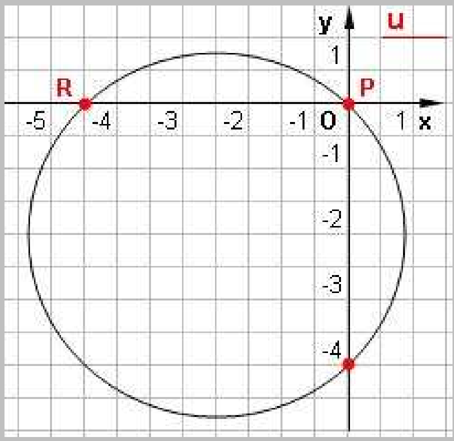
$$r = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2 - c} = \sqrt{4 + 5} = 3$$

Osservazione importante prima di proseguire:

**poichè l'equazione generica della circonferenza dipende dal valore dei coefficienti a, b, c, per determinarla servono sempre tre condizioni indipendenti, ossia si deve costruire un sistema di tre equazioni in tre incognite.**

3) se **c = 0** la circonferenza passa per l'origine degli assi.

Le coordinate dell'origine (0,0) soddisfano l'equazione (1), e ciò significa appunto che l'origine degli assi sta sulla circonferenza.




Dati **P(0,0)** ; **R(– 4,0)** e **Q(0,– 4)**

Applicando la formula

$$\mathbf{x^2 + y^2 + ax + by + c = 0}$$

abbiamo il sistema di tre equazioni in tre incognite imponendo il passaggio per i punti dati:

$$\begin{matrix} P) \\ R) \\ Q) \end{matrix} \begin{cases} c = 0 \\ 16 - 4a + c = 0 \\ 16 - 4b + c = 0 \end{cases}$$

Dalla seconda e terza equazione essendo c = 0 si deduce con facili passaggi che:

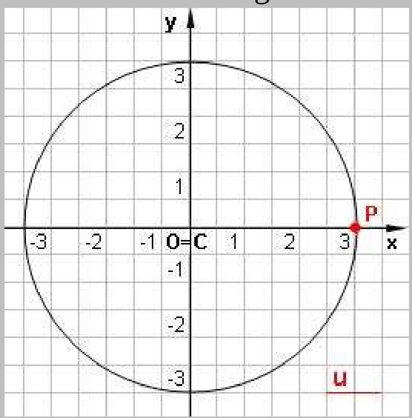
$$\begin{cases} a = b = 4 \\ 16 - 4a = 0 \quad \text{da cui } a = 16/4 = 4 \\ 16 - 4b = 0 \quad \text{da cui } b = 16/4 = 4 \end{cases}$$

Concludendo l'equazione della circonferenza cercata è **$x^2 + y^2 + 4x + 4y = 0$** C.V.D.

Con $r = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2 - c} = \sqrt{4+4} = 2\sqrt{2}$ e $C = \left(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2}\right) = (-2, -2)$

4)se **a = b = 0** il centro della circonferenza coincide con l'origine degli assi.

Infatti come dalla fig.:




Dati **C(0,0)** ; **P (3,0)** ed

$$r = d = CP = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

pari a

$$r = \sqrt{(3+0)^2 + (0-0)^2} = \sqrt{9} = 3$$

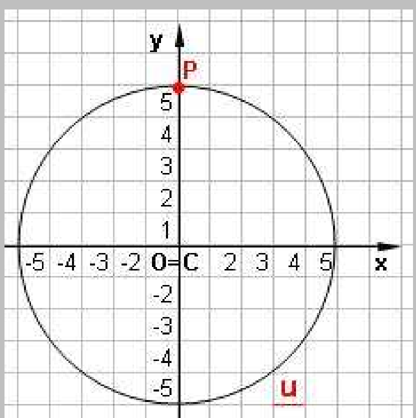
Applicando la formula **$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = r^2$** abbiamo

$$(x - 0)^2 + (y - 0)^2 = 9$$

$$\mathbf{x^2 + y^2 = 9 \quad C.V.D.}$$

Controllo $r = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2 - c} = \sqrt{9} = 3$

Infatti come dalla fig.:




Dati **C(0,0)** ; **P(0,5)** ed

$$r = d = CP = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

pari a

$$r = \sqrt{(0-0)^2 + (5+0)^2} = \sqrt{25} = 5$$

Applicando la formula **$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = r^2$** abbiamo

$$(x - 0)^2 + (y - 0)^2 = 25$$

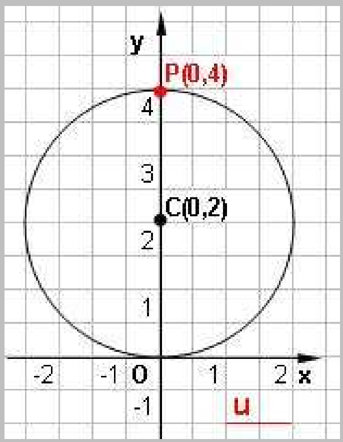
$$\mathbf{x^2 + y^2 = 25 \quad C.V.D.}$$

Controllo $r=\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2+\left(\frac{b}{2}\right)^2-c}=\sqrt{25}=5$

5) se **a = c = 0** la circonferenza è tangente all'asse x e ha il centro sull'asse y.

**I°) modo**

Infatti come dalla fig.:




Dati **C(0,2)** ; **P(0,4)** ed

$$r = d = CP= \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$

pari a

$$r=\sqrt{(0-0)^2+(2-4)^2}=\sqrt{4}=2$$

Applicando la formula **$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2 = r^2$** abbiamo

$$(x-0)^2+(y-2)^2 = 9$$

$$\mathbf{x^2+y^2-4y=0} \quad \textbf{C.V.D.}$$

Controllo $r=\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2+\left(\frac{b}{2}\right)^2-c}=\sqrt{4}=2$

**II°) modo** considerando **C(0,2)** ; **O(0,0)**

Imponendo il passaggio per l'origine e tenendo presente le coordinate del centro si ha ancora un sistema di tre equazioni in tre incognite cioè:

$$\begin{array}{l} O) \\ C_x) \\ C_y) \end{array}\begin{cases} c=0 \\ -a/2=0 \\ -b/2=2 \end{cases} \quad \text{da cui } c=0 \quad a=0 \quad e \quad b=-4$$

Concludendo l'equazione della circonferenza cercata è

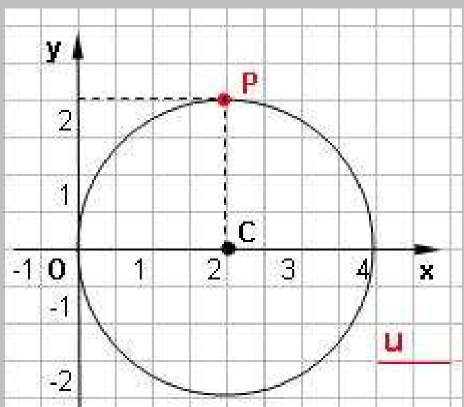
$$\mathbf{x^2+y^2-4y=0} \quad \text{C.V.D.}$$

con $r=\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2+\left(\frac{b}{2}\right)^2-c}=\sqrt{4}=2$ e $C=\left(-\frac{a}{2},-\frac{b}{2}\right)=(0,2)$

6)se b = c = 0 la circonferenza è tangente all'asse y e ha il centro sull'asse x.

**I°) modo**

Infatti come dalla fig.:




Dati **C(2,0)** ; **P (2,2)** ed

$$r = d = CP= \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$

pari a

$$r=\sqrt{(2-2)^2+(2-0)^2}=\sqrt{4}=2$$

Applicando la formula **$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2 = r^2$** abbiamo

$$(x-2)^2+(y-0)^2 = 9$$

$$\mathbf{x^2+y^2-4x=0} \quad \textbf{C.V.D.}$$

Controllo $r=\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2+\left(\frac{b}{2}\right)^2-c}=\sqrt{4}=2$

**II°) modo**

Dati **P(2,2)** ; **Q = O(0,0)** e **R(4,0)**

Applicando la formula **$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$**

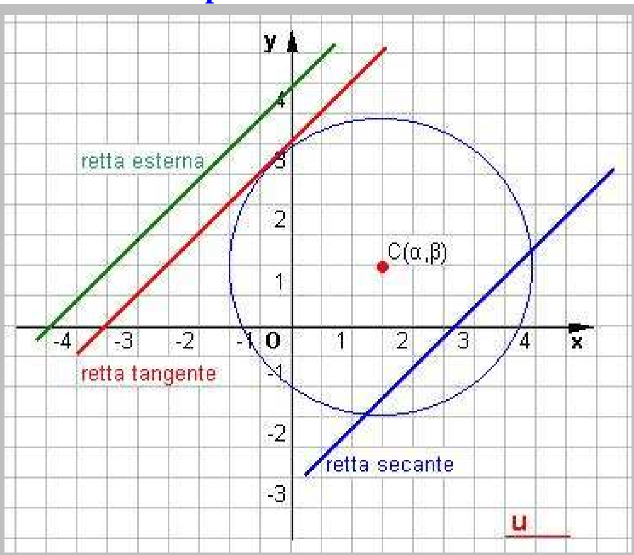
abbiamo il sistema di tre equazioni in tre incognite imponendo il passaggio per i punti dati:

$$\begin{array}{l} Q) \\ P) \\ R) \end{array}\begin{cases} c = 0 \\ 4 + 4 + 2a + 2b + c = 0 \\ 16 + 4a + c = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} c = 0 \\ 16 + 4a = 0 & a = -4 \\ 8 + 2a + 2b = 0 & b = 0 \end{cases}$$

Concludendo l'equazione della circonferenza cercata è **$x^2 + y^2 - 4x = 0$** C.V.D.

$$\text{Con} \quad r = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2 - c} = \sqrt{4} = 2 \quad \text{e} \quad C = \left(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2}\right) = (2,0)$$

## Posizione reciproca tra retta e circonferenza




Per studiare le varie posizioni che una retta assume rispetto ad una circonferenza, basta risolvere il sistema formato dalla equazione della circonferenza e della retta.

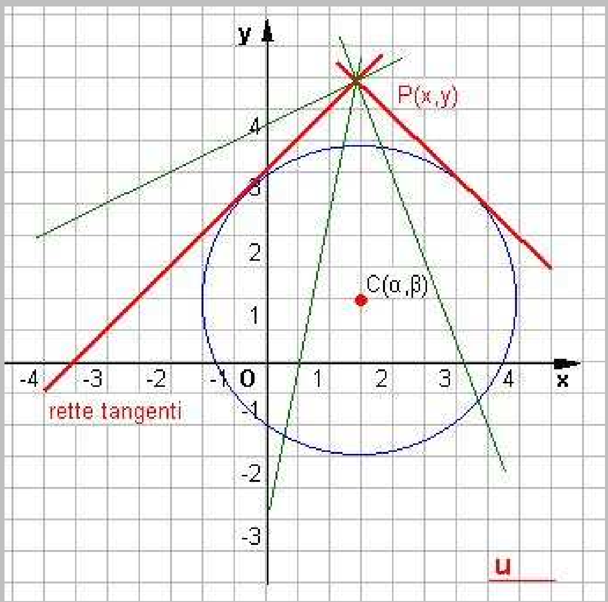
In base al segno del discriminante o **Δ** (delta) della equazione risolvente di secondo grado si ha:

**$\Delta > 0$** , si hanno due radici reali e distinte, cioè due punti d'intersezione, la retta è **secante** la circonferenza;

**$\Delta = 0$**, si hanno due radici reali e coincidenti, cioè un punto d'intersezione da contarsi due volte, la retta è **tangente** alla circonferenza;

**$\Delta < 0$** , si hanno due radici non reali la retta è **esterna** alla circonferenza.

## Determinazione delle tangenti ad una circonferenza




Dato il punto P(x,y) esterno alla circonferenza, esistono diversi metodi per determinare l'equazione delle tangenti condotta da P alla conica.

### 1) metodo

Basta imporre ad una generica retta uscente da P di avere dal centro della circonferenza distanza uguale al raggio.

### 2) metodo

Si costruisce il sistema tra l'equazione della circonferenza ed il fascio di rette centrato in P. Dopo avere determinato l'equazione risolvente della equazione di secondo grado si impone al suo discriminante di essere uguale a zero.

**Osservazione:** questo metodo è valido qualunque sia la conica presa in considerazione.

**3) metodo**

Se il punto P appartiene alla curva, basta imporre alla retta generica per P di avere coefficiente angolare uguale all'antireciproco di quello della retta contenente il diametro.

Infine è bene ricordare che se una delle tangenti è parallela all'asse y, allora si trova, con i metodi precedente, o un'equazione di I° grado in m, o addirittura un'equazione in m impossibile.

## Punti comuni a due circonferenze.

Due circonferenze possono avere in comune due punti reali e distinti, due punti reali e coincidenti od infine possono non avere punti reali in comune. Le coordinate dei punti comuni sono le soluzioni del sistema formato dalle equazioni delle due circonferenze, discutendone il relativo $\boldsymbol{\Delta}$ (delta) della equazione risolvente. Al sistema delle due equazioni delle circonferenze è possibile sostituire quello ottenuto da un'equazione risultata dalla differenza delle due equazioni date e l'altra da una equazione di una delle due circonferenze.
L'equazione ottenuta dalla differenza rappresenta una retta passante proprio per i due punti d'intersezione e per questo è detta "asse radicale".
In generale considerate due circonferenze non concentriche e detti $P_1$ e $P_2$ i loro punti comuni, la retta congiungente $P_1$ con $P_2$ dicesi asse radicale che :

a) è reale qualunque sia la posizione reciproca delle due circonferenze,
b) è perpendicolare alla congiungente i due centri.

## Fasci di Circonferenze

Analogamente a quanto visto per le rette si può introdurre la nozione di fascio di circonferenze.
Siano date sul piano due circonferenze (distinte) S ed S', le cui equazioni normali sono:

(1) $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0,$

(2) $x^2 + y^2 + a'x + b'y + c' = 0,$

oppure, con «notazione simbolica»: $S = 0$ e $S' = 0.$

Si consideri, ora, la seguente equazione:

(3) $\lambda S + \mu S' = 0,$

combinazione lineare delle equazioni (1) e (2), mediante i parametri $\lambda$ ed $\mu$.

Supposto $\lambda \neq 0$ e posto $t = \mu/\lambda$ , l'equazione (3) si può scrivere nella forma più semplice:

(3') $S + tS' = 0,$

ossia, in forma non simbolica: .

(3") $x^2 + y^2 + ax + by + c + t(x^2 + y^2 + a'x + b'y + c') = 0.$

È facile vedere che per ogni valore del parametro $t \neq -1$, l'equazione (3") rappresenta una circonferenza.
Infatti, essa si può scrivere sotto la forma:

(4 ) $(1 + t)x^2 + (1 + t)y^2 + (a + ta')x + (b + tb')y + c + c't = 0,$

ossia, avendo supposto $t \neq -1$:

(4') $$x^2 + y^2 + \frac{a+ta'}{1+t}x + \frac{b+tb'}{1+t}y + \frac{c+tc'}{1+t} = 0$$

che è l'equazione di una circonferenza, qualunque sia $t \neq -1$.

Ragionando analogamente si prova che la $\lambda S + \mu S' = 0$ rappresenta una circonferenza, purché $\lambda + \mu \neq 0$.

**Per t = 0**, dalla $x^2 + y^2 + ax + by + c + t(x^2 + y^2 + a'x + b'y + c') = 0$ si ottiene la:
(1) $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$, cioè l'equazione della circonferenza S;

**mentre per nessun valore della t** si può ottenere dalla

$$x^2 + y^2 + ax + by + c + t(x^2 + y^2 + a'x + b'y + c') = 0$$ la :

(2) $x^2 + y^2 + a'x + b'y + c' = 0$, cioè l'equazione della S'.

Pertanto la $S + tS' = 0$ o la $x^2 + y^2 + ax + by + c + t(x^2 + y^2 + a'x + b'y + c') = 0$ rappresenta tutte le circonferenze del fascio meno la S'.

L'equazione della S' si ottiene, invece dalla (3) $\lambda S + \mu S' = 0$ ponendo $\lambda = 0$ ed $\mu = 1$.

Concludendo:
Si chiama fascio di circonferenze, definito dalle circonferenze S ed S', l'insieme di tutte e sole le circonferenze rappresentate dalla (3) $\lambda S + \mu S' = 0$, con $\lambda + \mu \neq 0$; oppure l'insieme formato dalla circonferenza S' e da tutte le circonferenze rappresentate dalla (3') $S + tS' = 0$, con $t \neq -1$.

**Esaminiamo il caso, finora escluso, di t = –1.**

Per $t = -1$ l'equazione (3') $S + tS' = 0$ si può scrivere:

$$S' - S = 0,$$

ossia in forma non simbolica:

$$(a' - a)x + (b' - b)y + c' - c = 0.$$

Ora $S' - S$ è un polinomio di primo grado in x e y, a meno che le circonferenze S ed S' siano concentriche; in quest'ultimo caso è $a = a'$ e $b = b'$ e quindi $S' - S = 0$ è un numero (polinomio di grado zero in x e y). Se S ed S' non sono concentriche, la retta:

$$S' - S = 0,$$

si chiama **asse radicale** del fascio.
L'asse radicale di un fascio si considera come una circonferenza del fascio avente «raggio infinito», ed è chiamato, perciò, anche **circonferenza degenere** del fascio.

Si osservi, infine, che l'equazione (3') $S + tS' = 0$ è equivalente alla seguente:

$$S + tS' + tS - tS = 0, \quad \text{cioè :} \quad (1 + t) S + t(S' - S) = 0,$$

da cui, posto $t \neq -1$ e $\frac{t}{1+t} = t'$, si ha: $S + t'(S' - S) = 0$;

pertanto: nell'equazione (3') $S + tS' = 0$, **sostituendo la circonferenza S' con l'asse radicale, si ottiene una nuova equazione che rappresenta lo stesso fascio** (ritrovando così quanto già detto nel precedente paragrafo).

Per finire, segnaliamo alcune notevoli proprietà dei fasci di circonferenze, che solamente enunciamo:

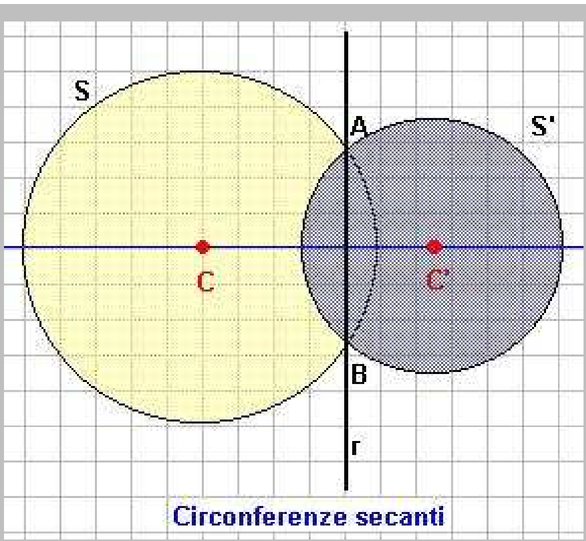
1[a]) Per ogni punto del piano, passa una sola circonferenza del fascio.

2ª) Nell'equazione (3) $\lambda S + \mu S' = 0$, o (3') $S + tS' = 0$, sostituendo le circonferenze S ed S' con altre due, qualsiasi, del fascio si ottiene una nuova equazione rappresentante il medesimo fascio.

3ª) Un fascio di circonferenze non concentriche si può rappresentare anche come combinazione lineare dell'equazione di una qualsiasi circonferenza del fascio con quella dell'asse radicale.

4ª) Il luogo dei centri delle circonferenze di un fascio è una retta perpendicolare all'asse radicale, detta asse centrale.

## Vari tipi di fasci di circonferenze




Vediamo ora come sono disposte tali circonferenze.

I casi che si possono presentare sono i seguenti:

**1° Caso. - Le circonferenze S ed S' si intersecano in due punti A e B.**

Se S ed S' si intersecano nei punti A e B allora ogni circonferenza del fascio, individuato da S ed S' passa sia per A che per B.
Viceversa: ogni circonferenza che passa tanto per A, quanto per B è una circonferenza del fascio, vedi figura a lato.
Infatti, poiché le coordinate di A e B verificano le equazioni:

(1) $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$,

(2) $x^2 + y^2 + a'x + b'y + c' = 0$,

allora verificano anche la:

(3) $\lambda S + \mu S' = 0$, o la (4) $S + tS' = 0$.

I punti A e B si chiamano **punti base** del fascio.

In questo caso, il fascio è costituito da tutte e sole le circonferenze passanti per A e B.

L'asse radicale $S' - S = 0$ risulta essere la retta AB.

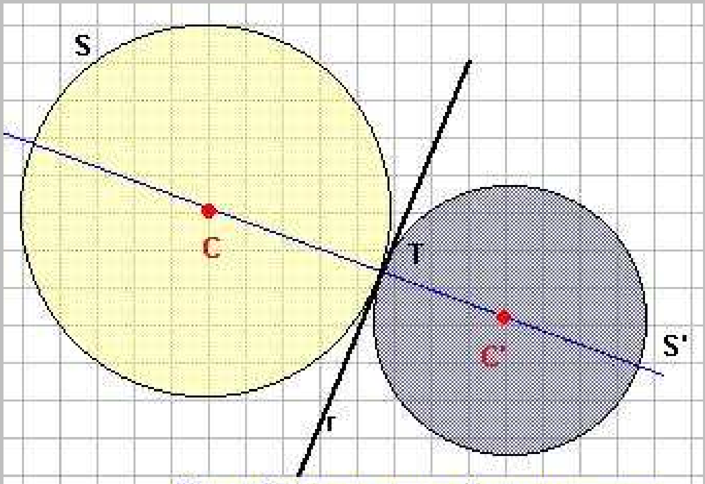
L'asse centrale, cioè il luogo dei centri delle circonferenze del fascio, risulta essere l'asse del segmento AB.

Dalla 3ª) proprietà enunciata precedentemente, segue in particolare:
Il fascio delle circonferenze passanti per due punti A e B, si può anche scrivere come combinazione lineare dell'equazione di una qualsiasi circonferenza passante per A e B con quella della retta AB.

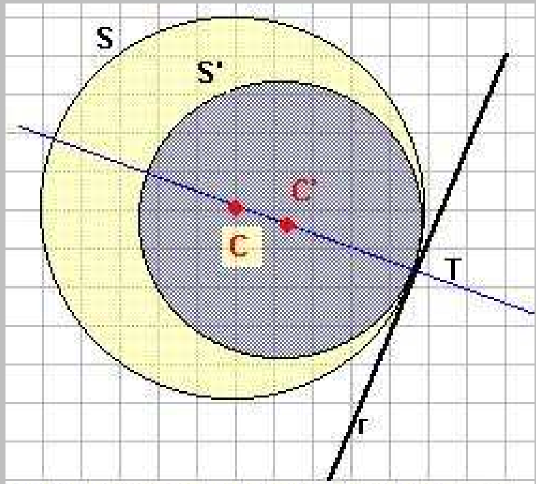
**2° Caso. - Le circonferenze S ed S' sono fra loro tangenti in un punto T.**

Se S ed S' sono fra loro tangenti in un punto T, allora tutte le circonferenze del fascio risultano tra loro tangenti in T, come nelle figure sottostanti.

L'asse radicale $S' - S = 0$ risulta essere la retta r passante per T e ivi tangente ad ogni circonferenza del fascio.




Circonferenze tangenti esternamente




Circonferenze tangenti internamente

Viceversa: ogni circonferenza che in T è tangente alla retta S' – S = 0, risulta essere una circonferenza del fascio. In questo caso, il fascio è costituito da tutte e sole le circonferenze tangenti in T alla retta S' – S = 0.

I centri delle circonferenze del fascio appartengono tutti alla retta per T, perpendicolare alla tangente comune.

In particolare:

Il fascio delle circonferenze tangenti ad una data retta r in un suo punto T, si può scrivere combinando l'equazione di una qualsiasi circonferenza tangente in T alla retta r, con quella della retta r.

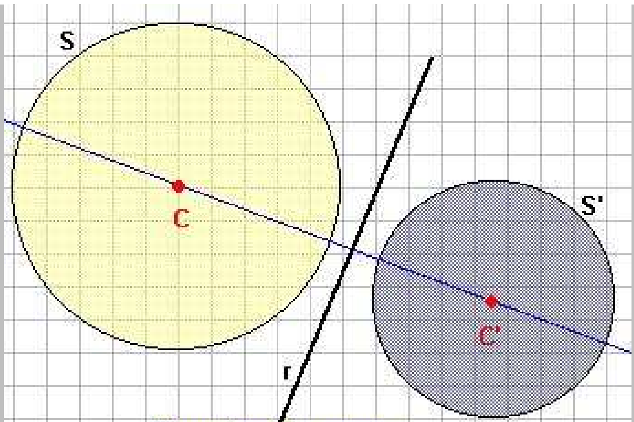
Il modo più semplice di trovare l'equazione del fascio è quella di combinare linearmente la circonferenza degenere di raggio 0, con l'asse radicale.

Quindi se $T(x_0, yo)$ e se $ax + by + c = 0$, è l'equazione di r, allora il fascio si può anche scrivere nella forma:

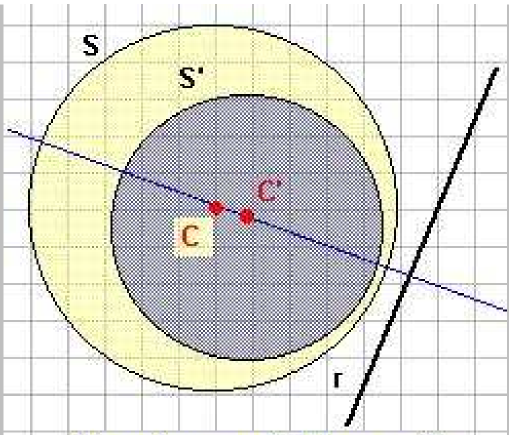
(5) $$[(x – x_0)^2 + (y – yo)^2] + t(ax + by + c) = 0.$$

**3° Caso. - Le circonferenze S ed S' non sono concentriche e non hanno punti in comune.**

Se S ed S' non hanno punti in comune, le circonferenze del fascio, a due a due, sono prive di punti comuni, e i loro centri stanno su una retta perpendicolare all'asse radicale come nelle figure sottostanti.



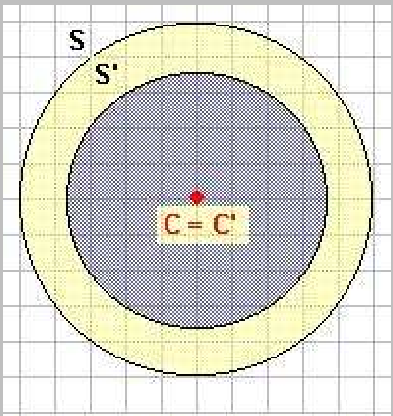

Circonferenze esterne




Circonferenza S' interna a S

**4° Caso. - Le circonferenze S ed S' sono concentriche.**

Se S ed S' sono concentriche, allora ogni circonferenza del fascio è concentrica a S (e a S' ); e viceversa, ogni circonferenza concentrica a S (e a S' ) è una circonferenza del fascio come in figura.



Circonferenze concentriche

Infatti, essendo in tal caso:

a = a' e b = b', l'equazione

$$(4') \quad x^2 + y^2 + \frac{a+ta'}{1+t}x + \frac{b+tb'}{1+t}y + \frac{c+tc'}{1+t} = 0$$

diventa:

$$x^2 + y^2 + ax + by + \frac{c+tc'}{1+t} = 0,$$

che è, qualunque sia $t \neq -1$, l'equazione di una circonferenza concentrica a S ed S'.

In questo caso, il fascio è costituito da tutte e sole le circonferenze concentriche a S (e a S').

Si può dimostrare che:

Il fascio delle circonferenze concentriche alla circonferenza S (di equazione S = 0), si può scrivere:

$$\lambda S + k = 0, \quad \text{con } \lambda \neq 0.$$

Osservazione

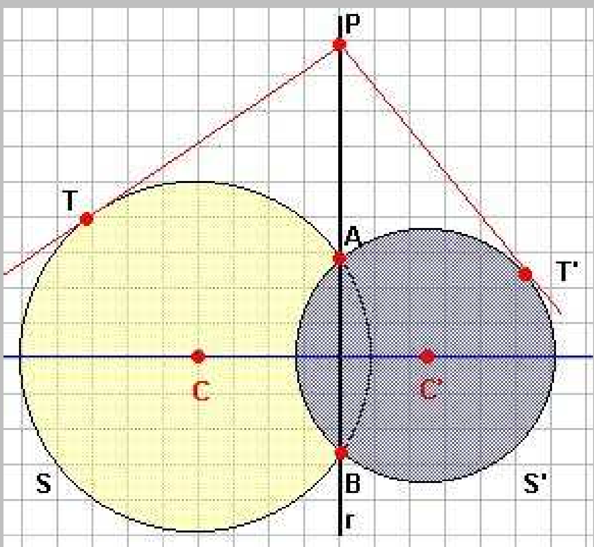
Significato geometrico dell'asse radicale

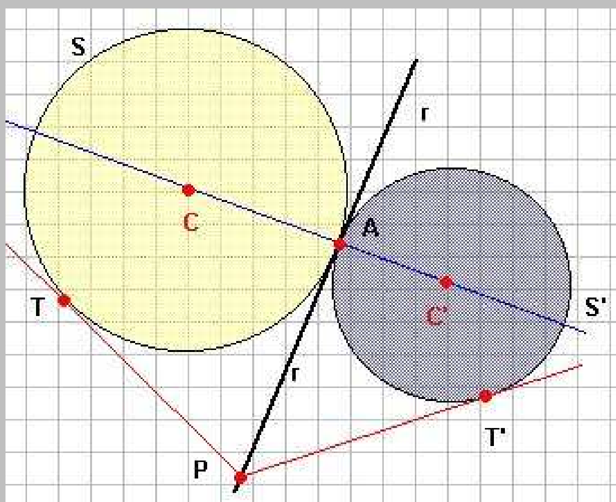
Ci limitiamo a segnalare questa proprietà caratteristica dell'asse radicale che ne da il significato geometrico, qualunque sia la reciproca posizione delle circonferenze del fascio (purché non siano concentriche).

Per ogni punto P dell'asse radicale, si conducano i segmenti di tangente PT e PV, rispettivamente, alle due circonferenze S ed S' come nelle figure della pagina successiva.

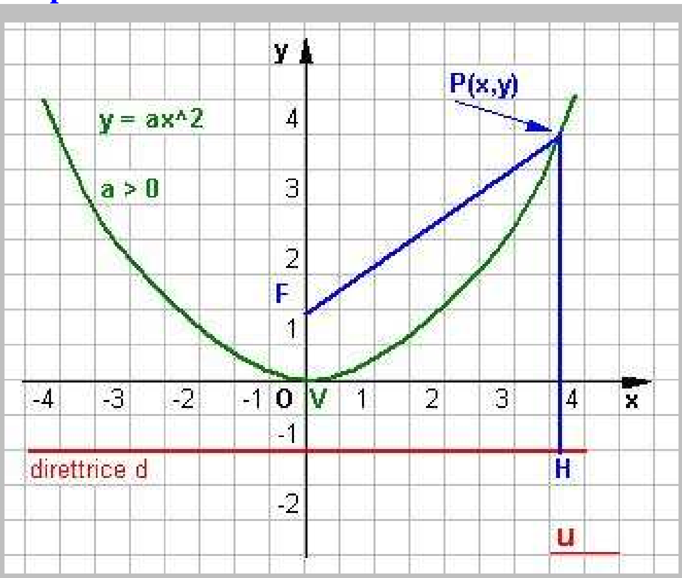
Ebbene si dimostra che i due segmenti PT e PT' sono isometrici, cioè:

$$PT = PT'.$$



## La parabola: definizione analitica




**La parabola** è una conica definita come il luogo dei punti del piano equidistanti da un punto fisso **F**, detto **fuoco**, e da una retta fissa **d**, detta **direttrice**.

Riferiti gli elementi ad una coppia di assi di cui quello delle y passante per F e perpendicolare alla retta d, sia l'origine O il punto equidistante da F e da d ( **vertice della parabola** ); l'asse x sarà allora parallelo alla retta d. La retta passante per il vertice e perpendicolare alla direttrice ( in questo caso l'asse y ) è l'**asse di simmetria della parabola**.

Se P(x,y) è un generico punto e F(0,m) è il fuoco, per definizione deve essere: PF = PH.

Ma $PF = \sqrt{x^2 + (y-m)^2}$

e $PH = |y + m|$ allora segue che:

$$\sqrt{x^2 + (y-m)^2} = |y + m|$$

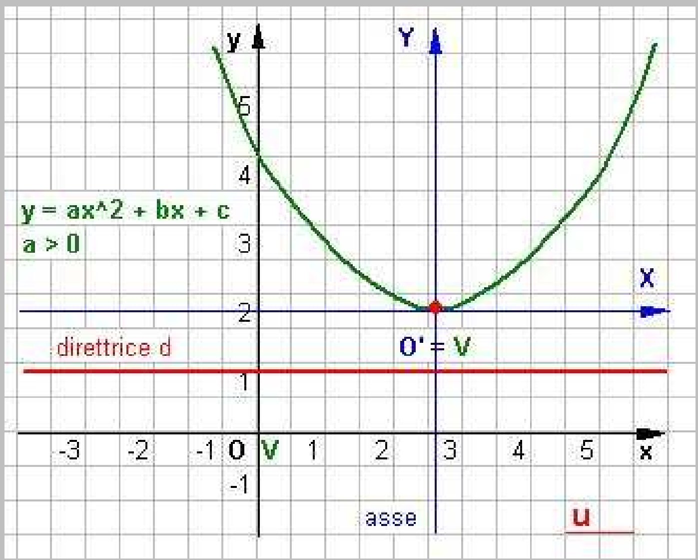
Elevando al quadrato si ottiene $y = \frac{1}{4m}x^2$ e, ponendo $\frac{1}{4m} = a$ si ricava

(1) $\mathbf{y = a x^2}$ .

La (1), rappresenta dunque l'equazione di una parabola con il vertice nell'origine , avente asse di simmetria coincidente con l'asse y, fuoco in $F\left(0, \frac{1}{4a}\right)$ e direttrice di equazione $y = -\frac{1}{4a}$

La parabola è una funzione simmetrica rispetto al suo asse.
E' importante osservare che il vertice appartiene alla curva mentre il fuoco no. Segue che le coordinate del vertice verificano l'equazione della parabola, quelle del fuoco non la verificano.

## Equazione generale parabola con asse parallelo all'asse y




Si consideri l'equazione

(2) $\mathbf{y = ax^2 + bx + c}$

verifichiamo che rappresenta una parabola, con a, b, c costanti arbitrarie. La (2) si può scrivere ( aggiungendo e togliendo la stessa quantità: $\frac{b^2}{4a}$ )

$$y + \frac{b^2}{4a} - c = ax^2 + bx + \frac{b^2}{4a} \quad \text{ossia}$$

$$y + \frac{b^2 - 4ac}{4a} = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$$

Si consideri il nuovo sistema di assi cartesiani

XO'Y, con origine O' di coordinate

$$O' = \left(-\frac{b}{2a}, -\frac{b^2-4ac}{4a}\right)$$

Applicando le opportune formule relative alla traslazione degli assi e cioè

$$x = X - \frac{b}{2a} \qquad y = Y - \frac{b^2-4ac}{4a}$$

si ottiene che l'equazione della curva riferita al nuovo sistema di assi cartesiani è

$$Y = aX^2.$$

Tale parabola rispetto ai nuovi assi ha il vertice coincidente con l'origine O', l'asse di simmetria coincide con Y. Concludendo la (2) rappresenta una parabola con

**vertice** $V = \left(-\frac{b}{2a}, -\frac{b^2-4ac}{4a}\right) = \left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right)$

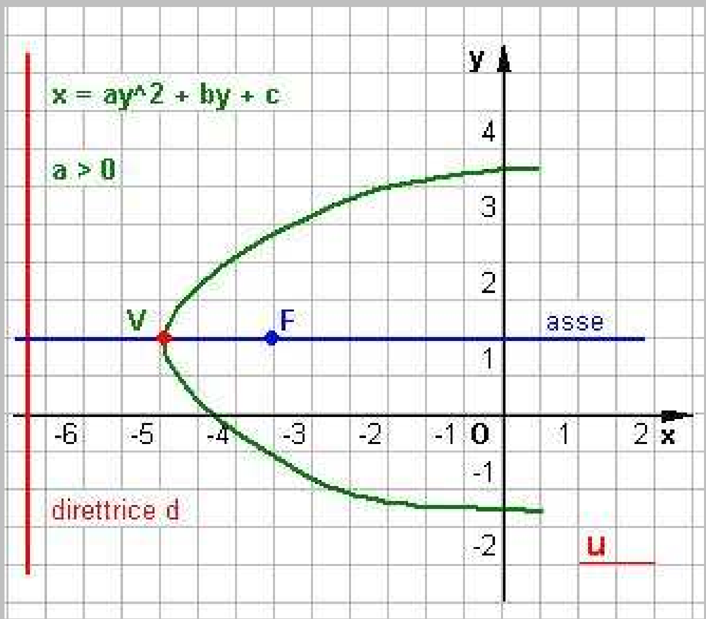
**fuoco** $F = \left(-\frac{b}{2a}, \frac{1}{4a} - \frac{b^2-4ac}{4a}\right) = \left(-\frac{b}{2a}, \frac{1-\Delta}{4a}\right)$

**direttrice di equazione**: $y = \left(-\frac{1}{4a} - \frac{b^2-4ac}{4a}\right) = \left(-\frac{1}{4a} - \frac{\Delta}{4a}\right) = \left(-\frac{1+\Delta}{4a}\right)$

**asse di simmetria di equazione**: $x = -\frac{b}{2a}$

Se $a > 0$ (positivo) la parabola volge la concavità verso l'alto, ed il vertice è il punto di minima ordinata appartenente alla curva;
se $a < 0$ (negativo) la parabola volge la concavità verso il basso, ed il vertice è il punto di massima ordinata appartenente alla curva.

## Parabola con asse parallelo all'asse delle x




L'equazione **x = a y ² + by + c** rappresenta in piano cartesiano, sempre una parabola ma con asse di simmetria parallelo all'asse delle x. Per cui è caratterizzata da:

**asse** parallelo all'asse delle x di equazione:

$$y = -\frac{b}{2a}$$

**fuoco** di coordinate:

$$F = \left(\frac{1}{4a} - \frac{b^2-4ac}{4a}, -\frac{b}{2a}\right) = \left(\frac{1-\Delta}{4a}, -\frac{b}{2a}\right)$$

**vertice** di coordinate:

$$V = \left(-\frac{b^2-4ac}{4a} - \frac{b}{2a}\right) = \left(-\frac{\Delta}{4a} - \frac{b}{2a}\right)$$

**direttrice** di equazione: $x = -\frac{1}{4a} - \frac{b^2-4ac}{4a} = -\frac{1+\Delta}{4a}$.

Se $a > 0$ (positivo) la concavità è rivolta verso destra
se $a < 0$ (negativo) la concavità è rivolta verso sinistra.

## Intersezioni della parabola con una retta

Al solito, per trovare l'intersezione della parabola con una retta, basta far sistema fra l'equazione della parabola e quella della retta. Calcolato il discriminante dell'equazione risolvente del sistema, possono presentarsi tre casi:

1) Se è $\Delta > 0$, si hanno due intersezioni distinte e la *retta è secante*.
2) Se è $\Delta = 0$, si hanno due intersezioni coincidenti nello stesso punto; la *retta è tangente*.
3) Se è $\Delta < 0$, non si hanno soluzioni reali, quindi la *retta è esterna*.

Vediamone l'impostazione teorica:
Sia data una parabola di equazione $\mathbf{y = ax^2 + bx + c}$
ed una retta r di equazione $\mathbf{y = mx + q}$.
Le coordinate dei punti d'intersezione tra la parabola ed r sono le soluzioni del sistema di 2° grado:

$$\begin{cases} y = ax^2 + bx + c \\ y = mx + q \end{cases}$$

dal quale si ricava l'equazione risolvente $\mathbf{ax^2 + (b - m)x + c - q = 0}$
le cui soluzioni sono le ascisse dei punti d'intersezione .
Considerato il discriminante $\Delta = (b - m)^2 - 4(c - q)$
Si possono presentare i tre casi già visti.
Se la retta r e parallela all'asse di simmetria della parabola, essa interseca la parabola in un sol punto, infatti il sistema

$$\begin{cases} y = ax^2 + bx + c \\ y = h \end{cases}$$

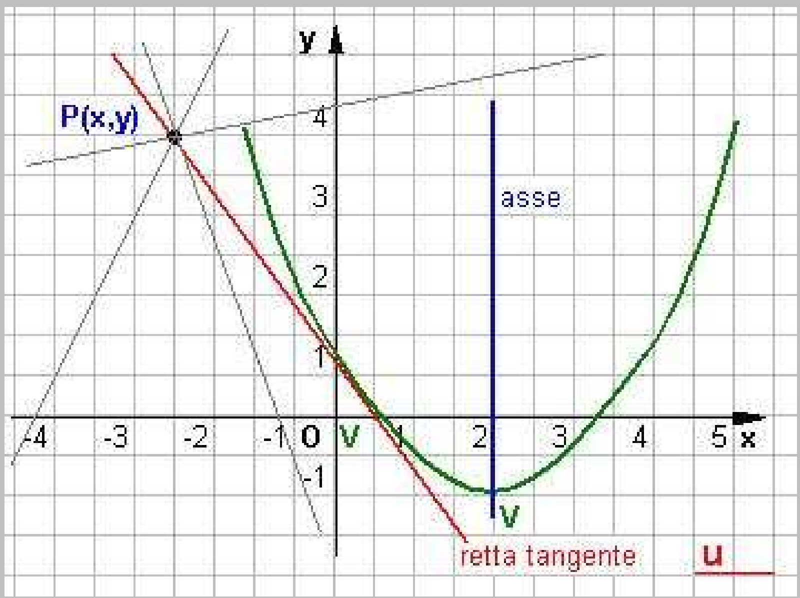
ammette l'unica soluzione $\mathbf{P(h; ah^2 + bh + c)}$

Analogamente il sistema

$$\begin{cases} x = ay^2 + by + c \\ y = h \end{cases}$$

ammette l'unica soluzione $\mathbf{P(ah^2 + bh + c; h)}$

## Tangenti alla parabola




Per determinare le equazioni delle rette tangenti alla parabola, condotte per un punto non interno alla concavità, si deve costruire il sistema formato dalla equazione generale della curva e dal fascio di rette centrato in $P(x_0,y_0)$. Si impone poi la condizione di tangenza

$\mathbf{\Delta = 0}$ e cioè che il discriminante della equazione risolvente di secondo grado sia uguale a zero.

Vediamone l'impostazione teorica:
abbiamo l'equazione della parabola e l'equazione del fascio di rette centrato in $P(x_0,y_0)$ (retta generica passante per un punto) messe a sistema

$$\begin{cases} \mathbf{y = ax^2 + bx + c} \\ \mathbf{y - y_0 = m(x - x_0)} \end{cases}$$

Se il punto $P(x_0,y_0)$appartiene alla parabola di equazione

$$\mathbf{y = ax^2 + bx + c}$$

l'equazione della tangente alla parabola in P si può scrivere mediante la **formula di sdoppiamento**

$$\frac{y - y_0}{2} = axx_0 + b\frac{x + x_0}{2} + c$$

mentre se il punto $P(x_0,y_0)$ appartiene alla parabola di equazione

$$\mathbf{x = ay^2 + by + c}$$

l'equazione della tangente alla parabola in P si può scrivere

$$\frac{x + x_0}{2} = ayy_0 + b\frac{y - y_0}{2} + c$$

## Condizioni generali per determinare l'equazione di una parabola.

Poiché nell'equazione della parabola sia nella forma
$\mathbf{y = ax^2 + bx + c}$ che $\mathbf{x = ay^2 + by + c}$ compaiono tre coefficienti, per determinarli occorrerà imporre tre condizioni.
Indichiamone alcuni casi che possono presentarsi più frequentemente:

1) Passaggio per tre punti
2) Conoscenza delle coordinate del vertice e del fuoco
3) Conoscenza delle coordinate del vertice e passaggio per un punto
4) Conoscenza delle coordinate del vertice e dell'equazione della direttrice
5) Passaggio per due punti e tangenza ad una data retta
6) Conoscenza dell'equazione dell'asse e della direttrice, e passaggio per un punto.

## Fasci di parabole

In modo del tutto analogo a quanto fatto per i circoli, si definisce il fascio di parabole.
Le considerazioni che seguono si riferiscono a parabole con l'asse parallelo all'asse y, ma quanto verrà detto si può ripetere anche per le parabole con l'asse parallelo all'asse x.
Siano :

$$p_1)\ y = ax^2 + bx + c \qquad p_2)\ y_1 = a_1x^2 + b_1x + c_1$$

le equazioni di due parabole, che possiamo così riscrivere:

$$y - ax^2 - bx - c = 0 \quad e \quad y_1 - a_1x^2 - b_1x - c_1 = 0$$

e consideriamo l'equazione:

$$y - ax^2 - bx - c + t\,(\,y_1 - a_1x^2 - b_1x - c_1\,) = 0$$

combinazione lineare delle due precedenti.
L'ultima equazione scritta con opportuni passaggi algebrici si può anche scrivere nella forma:

$$(\,1 + t\,)\,y = (\,a + t\,a_1\,)\,x^2 + (\,b + tb_1\,)\,x + (\,c + tc_1\,)$$

o anche per $t \neq -1$, nella forma :

$$y = \frac{a + a_1t}{1+t}x^2 + \frac{b + tb_1}{1+t}x + \frac{c + tc_1}{1+t}$$

la quale, se è anche $(\,a + t\,a_1\,) \neq 0$, cioè $t \neq -\dfrac{a}{a_1}$, rappresenta una parabola.

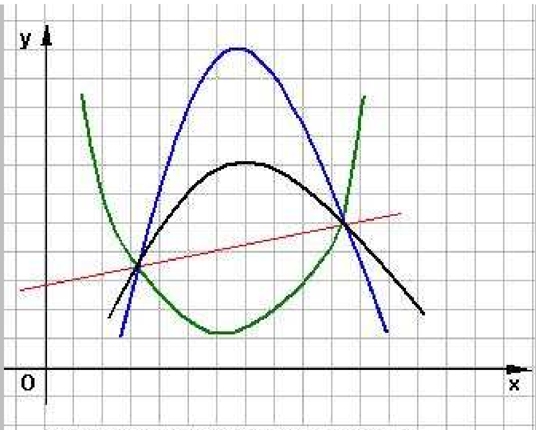
L'insieme della parabola $p_2$ e della infinità delle parabole rappresentate dall'ultima equazione scritta, al variare del parametro t, si dice fascio di parabole.
Per t = 0 si ottiene la parabola $p_1$ mentre la $p_2$ non si ottiene per alcun valore del parametro.

Se si pone $t = -\frac{a_1}{a}$ ( e $t \neq -1$ ), l'eq.ne diventa:

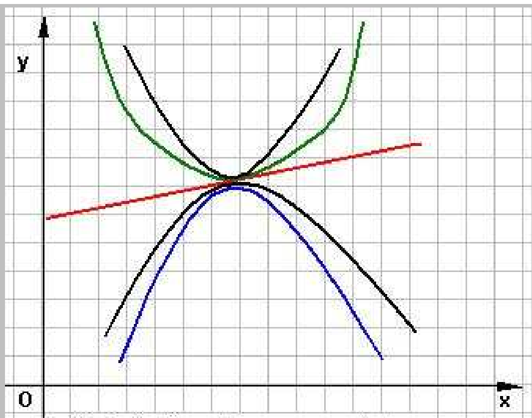
$$y = \frac{b + tb_1}{1+t}x + \frac{c + tc_1}{1+t}$$

che è l'equazione di una retta che si considera come la *parabola degenere* del fascio.

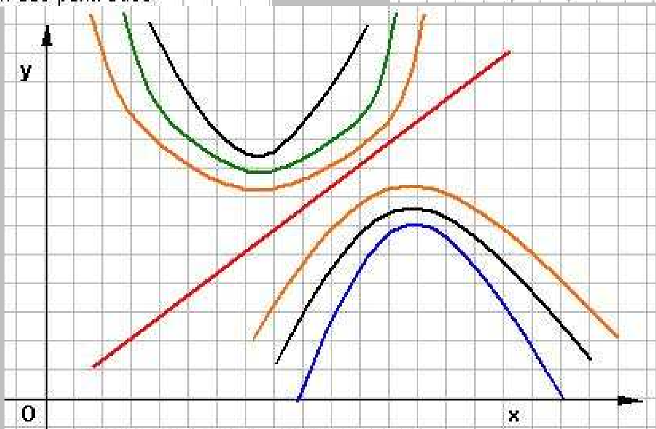
Anche un fascio di parabole, come i fasci di circoli, può essere individuato dalla retta scritta e da una parabola qualsiasi del fascio.



Famiglia di parabole con due punti base



Famiglia di parabole con un punto base



Famiglia di parabole senza punti base

Poiché una retta può avere in comune con una parabola due punti distinti ( retta secante ), due punti coincidenti ( retta tangente ), o nessun punto ( retta esterna ), le parabole di un fascio possono essere disposte come in figura.

Quando esistono, i punti comuni alle parabole (e alla retta) del fascio si chiamano **punti base**.
Per determinare gli eventuali punti base del fascio, si scrive, se possibile, l'equazione del fascio nella forma:

$$y = + t ( a_1x^2 + b_1x + c_1 ) + ax^2 + bx + c$$

Le soluzioni, se esistono, dell'equazione $a_1x^2 + b_1x + c_1 = 0$ (*) sono le ascisse dei punti base: infatti le ordinate corrispondenti che si ottengono della (*) non dipendono dal parametro .

Esaminiamo, ora, il caso finora escluso, di $t = 1$.

In tal caso l'equazione

$$(1 + t)\, y = (a + t\, a_1)\, x^2 + (b + tb_1)\, x + (c + tc_1)$$

si riduce, in generale, all'equazione di 2° grado:

$$(a + t\, a_1)\, x^2 + (b + tb_1)\, x + (c + tc_1) = 0 \quad (**)$$

che rappresenta una parabola degenere in due rette parallele all'asse y distinte o coincidenti, a seconda che il discriminante $\Delta$ dell'equazione risulti maggiore o uguale a zero; se $\Delta < 0$ non ci sono parabole degeneri.

Se infine l'equazione (**) diventa di primo grado, questa rappresenta una retta parallela all'asse y e appartiene al fascio.
In particolare, se la retta del fascio ha equazione $x = k$, l'equazione del fascio si ottiene combinando la parabola $y = ax^2 + bx + c$ e la retta $x - k = 0$, ottenendo :

$$y - ax^2 - bx - c + t\,(x - k) = 0$$

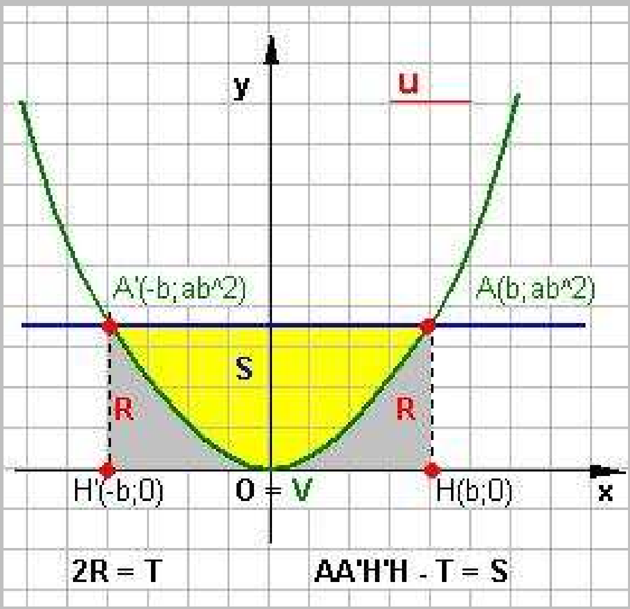
ossia

$$y = ax^2 + (b - t)x + (c + tk) = 0.$$

Come si nota, tutte le parabole del fascio hanno lo stesso parametro a, passano per uno stesso punto di coordinate $(k, ak^2+bk+c)$ e sono sovrapponibili l'una all'altra con una traslazione.

## Teorema di Archimede (area del segmento parabolico)

Sia $y = ax^2$ $(a > 0)$ l'equazione di una parabola con vertice in O (0,0) e siano A $(b;ab^2)$ e A'$(-b;ab^2)$ due suoi punti. La regione finita S del piano delimitata dall'arco AVA' di parabola e dal segmento AA' in figura prende il nome di ***segmento parabolico***.




L'area di S (nella figura di colore giallo) risulta uguale alla differenza tra l'area del rettangolo AA'H'H e quella della regione T (nella figura di colore grigio) delimitata dall'arco AVA' e dai segmenti AH, A'H' e H'H; per la simmetria rispetto all'asse y, l'area di T risulta doppia dell'area della regione R delimitata dall'arco AV e dai segmenti AH e OH, perciò:

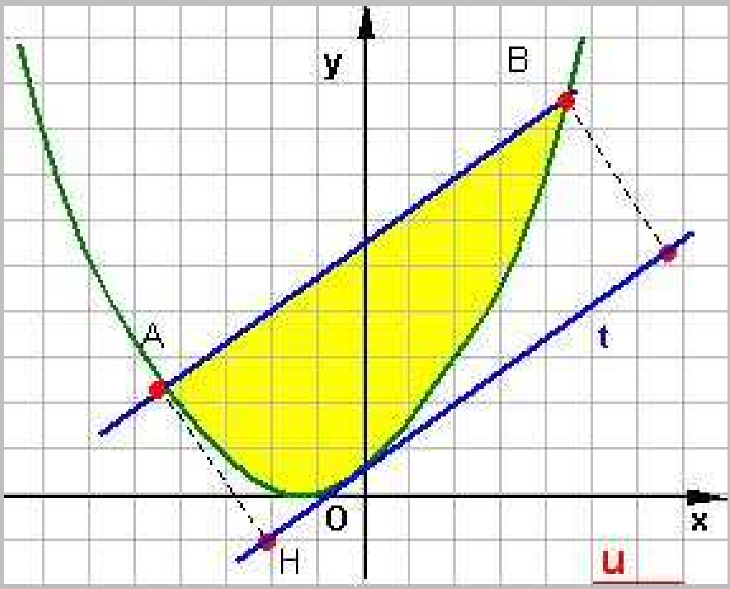
$$\text{Area (S)} = 2\, ab^3 - \text{Area(T)} = 2ab^3 - 2\text{Area(R)}$$

Per calcolare l'area di R si può utilizzare o un metodo di approssimazione o un metodo mediante l'integrale definito di funzione, omettiamo la dimostrazione, ne utilizziamo solo il risultato

$$\text{Area(R)} = \frac{1}{3}ab^3$$

Conseguentemente:

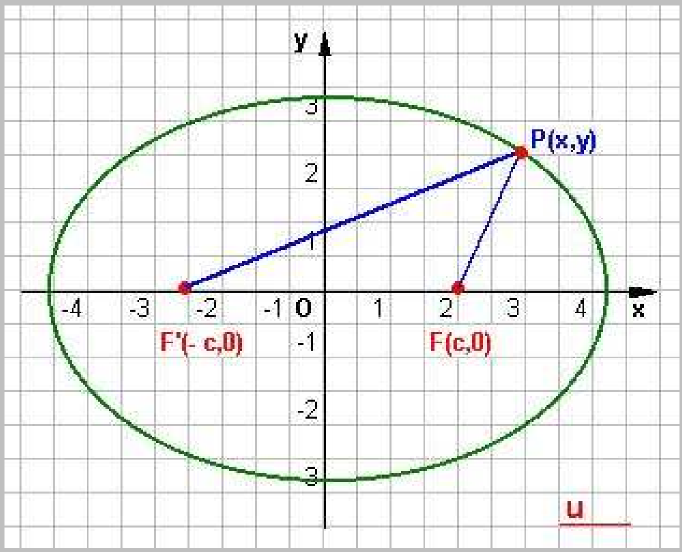
$$\text{Area (S)} = 2\, ab^3 - \text{Area(T)} = 2ab^3 - 2(\frac{1}{3}ab^3) = \frac{4}{3}ab^3$$




Pertanto **l'area del *segmento parabolico* AA'VA è uguale ai $\frac{2}{3}$ dell'area del rettangolo AA'H'H** (teorema di Archimede).

La regola vale anche nel caso in cui la corda AB non sia perpendicolare all'asse della parabola.
Tracciata la retta t tangente alla parabola e parallela alla retta AB, l'area del segmento parabolico ABV è uguale a $\frac{2}{3}$ dell'area del rettangolo avente base AB e altezza uguale alla distanza tra la retta t e la retta AB: Area(S) = $\frac{2}{3}$ AB●AH

## Ellisse: definizione analitica




**L'ellisse** è una conica definita come il luogo dei punti del piano per i quali è costante la somma delle loro distanze da due punti fissi detti fuochi.

Sia P(x,y) un generico punto appartenente alla conica; indicata con 2a (a > 0) la somma costante delle distanze di P dai due fuochi F, F' deve risultare:

$$PF + PF' = 2a.$$

Passando alle misure

$$\sqrt{(x-c)^2+y^2}+\sqrt{(x+c)^2+y^2}=2a$$

Isolando il primo radicale, trasportando il secondo nel secondo membro ed elevando al quadrato, si ottiene,

$$\left(\sqrt{(x+c)^2+y^2}\right)^2=\left(2a-\sqrt{(x-c)^2+y^2}\right)^2$$

$$(x+c)^2+y^2=4a^2+((x+c)^2+y^2)-4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}$$

$$x^2+2xc+c^2+y^2=4a^2+x^2-2xc+c^2+y^2-4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}$$

$$4xc-4a^2=-\ 4a^2\sqrt{(x-c)^2+y^2}$$

dopo aver elevato nuovamente al quadrato e con semplici riduzioni avremo:

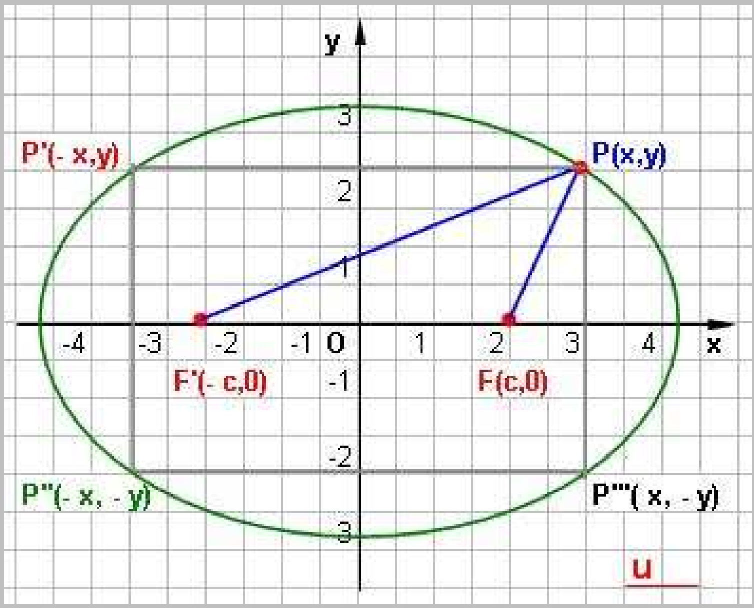
$$(xc-a^2)^2=\left(-\ a^2\sqrt{(x-c)^2+y^2}\right)^2$$
$$x^2c^2-2xa^2c+a^4=a^2((x-c)^2+y^2)$$
$$x^2c^2-2xa^2c+a^4=a^2(x^2+c^2-2xc)+a^2y^2$$
$$x^2c^2-2xa^2c+a^4=a^2x^2+a^2c^2-2xa^2c+a^2y^2$$
$$x^2c^2-a^2x^2-a^2y^2=-a^4+a^2c^2$$
$$-\ x^2(a^2-c^2)-a^2y^2=-a^2(a^2-c^2)$$
$$\mathbf{(a^2-c^2)x^2+a^2y^2=a^2(a^2-c^2)}$$

Si osservi ora che deve ritenersi 2a >2c, ossia a > c perchè nel triangolo F'PF il lato F'F è minore della somma degli altri due; perciò la differenza $a^2 - c^2$ è positiva, e si può porre: $\mathbf{a^2 - c^2 = b^2}$,
in cui anche b è reale positivo.
L'equazione precedente diventa così: $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$,
da cui dividendo ambedue i membri per $a^2b^2$, si ottiene :

(1) $$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

La (1) è **l'equazione dell'ellisse in forma canonica o normale**.
Si dice che l'ellisse è così riferita al centro e agli assi.

## Simmetrie nell'ellisse



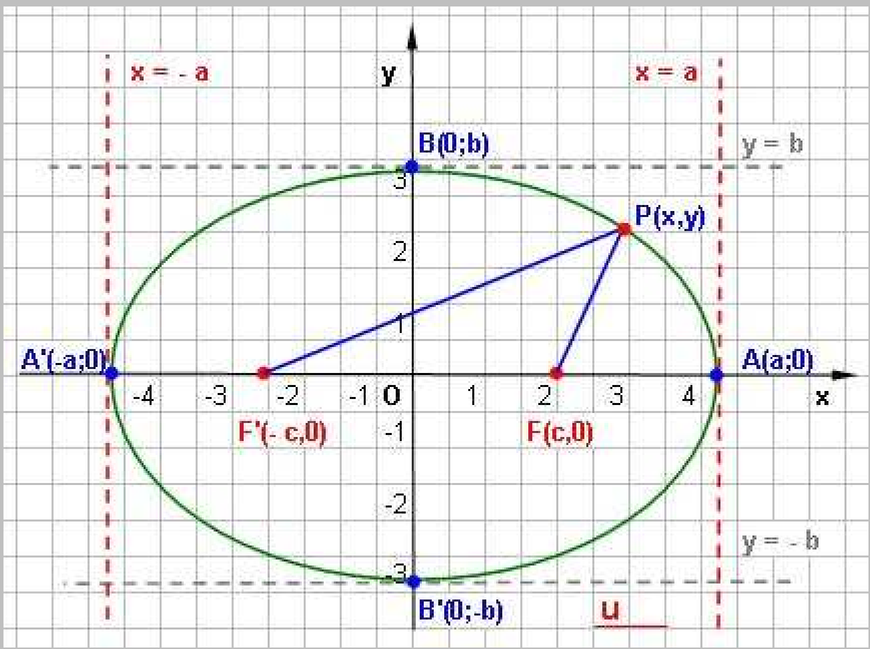

Nella equazione canonica dell'ellisse, x ed y compaiono elevati al quadrato. Ciò significa che se il punto P di coordinate (x, y) appartiene alla conica, allora vi appartengono anche i punti:

P'(–x, y), P''(–x, –y), P'''(x, –y).

Possiamo affermare allora che *l'ellisse è una curva simmetrica rispetto a ciascuno degli assi coordinati e rispetto all'origine. L'origine O si dice centro della ellisse.*

## Proprietà dell'ellisse

**1)** Analizzando l'equazione canonica dell'ellisse si deduce che




$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2)$$

$$x^2 = \frac{a^2}{b^2}(b^2 - y^2)$$

poichè i primi membri sono positivi o nulli, altrettanto devono esserlo i secondi, quindi

$$-a \leq x \leq a$$
$$-b \leq y \leq b$$

ne segue che l'ellisse è tutta contenuta nel rettangolo individuato dalle rette
x = a, x = – a, y = b, y = – b.

**2)** Ponendo a sistema la conica con gli assi , si verifica che l'ellisse incontra l'asse delle x nei punti A(a,0), A'(–a,0), l'asse delle y nei punti B(0,b), B'(0,–b).

$$\begin{cases} x = 0 \\ \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 0 \\ y = \pm b \end{cases} \qquad \begin{cases} y = 0 \\ \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} y = 0 \\ x = \pm a \end{cases}$$

I punti A, A', B, B', si dicono i **vertici** dell'ellisse.

Il segmento AA', che contiene i fuochi si dice **asse maggiore** dell'ellisse, il segmento BB' **asse minore**. I numeri a e b rappresentano rispettivamente le misure del semiasse maggiore e minore.

**3)** Note le misure dei semiassi è possibile determinare i fuochi. Infatti dalla relazione:

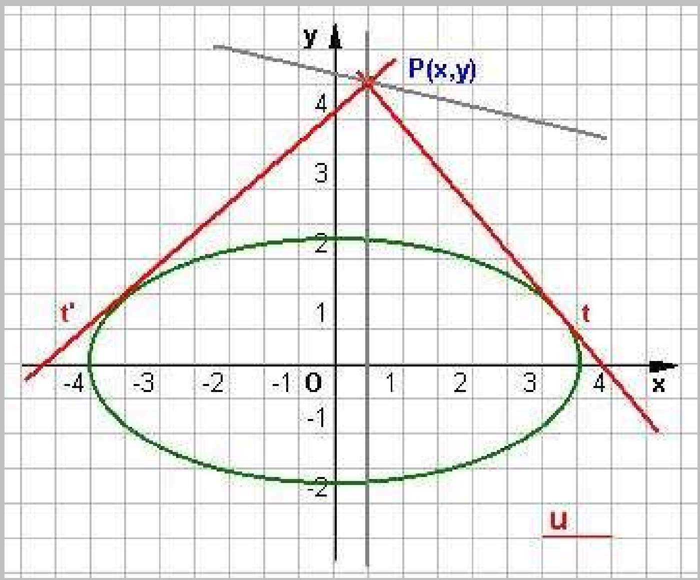
$a^2 - c^2 = b^2$ si ricava $c = \pm\sqrt{a^2 - b^2}$ che è la formula cercata.

## Intersezioni dell'ellisse con una retta

Al solito, per trovare l'intersezione della ellisse con una retta, basta far sistema fra l'equazione dell'ellisse e quella della retta. Si possono presentare i soliti tre casi, secondo il valore del discriminante dell'equazione risolvente, e precisamente:

1) Se è $\Delta > 0$, si hanno due intersezioni distinte e la *retta è secante.*
2) Se è $\Delta = 0$, si hanno due intersezioni coincidenti nello stesso punto; la *retta è tangente.*
3) Se è $\Delta < 0$, non si hanno soluzioni reali, quindi la *retta è esterna.*

## Tangenti ad un'ellisse




Per determinare l'equazione delle tangenti da un punto P ad un'ellisse, si costruisce il sistema tra l'equazione della curva e la generica retta per il punto ed si impone che il discriminante dell'equazione risolvente sia uguale a zero (**Δ=0**).

In particolare, se il punto $P_0(x_0,y_0)$ appartiene alla curva, l'equazione della tangente in P all'ellisse è:

$$\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = 1$$

detta **formula di sdoppiamento.**
Questa formula analogamente, alla formula vista per la parabola, si ottiene risolvendo il sistema:

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1 \\ y - y_0 = m(x - x_0) \end{cases}$$

Vediamone per l'ellissi i passaggi teorici per ottenerla, imponendo che esso abbia la coppia $(x_0,y_0)$ come soluzione doppia $\Delta = 0$.
Imponiamo la condizione di appartenenza del punto $P_0(x_0,y_0)$ all'ellissi, ottenendo

$$\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} = 1 \quad \textbf{(*)}$$

Essendo il 2° membro della prima equazione del sistema pari anch'esso ad 1 uguagliamo le due equazioni, da cui

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{{x_0}^2}{a^2}+\frac{{y_0}^2}{b^2}$$ e con facile passaggio algebrico

$$\frac{x^2-{x_0}^2}{a^2}+\frac{y^2-{y_0}^2}{b^2}=0$$

Ne consegue che il sistema iniziale ora lo si può scrivere cosi:

$$\begin{cases}\dfrac{(x-x_0)(x+x_0)}{a^2}+\dfrac{(y-y_0)(y+y_0)}{b^2}=0\\ y-y_0=m(x-x_0)\end{cases}$$

Sostituendo nella prima equazione a $(y - y_0)$ il valore fornito dalla 2^ equazione, si ha:

$$\begin{cases}\dfrac{(x-x_0)(x+x_0)}{a^2}+\dfrac{m(x-x_0)(y+y_0)}{b^2}=0\\ y-y_0=m(x-x_0)\end{cases}$$

$$\begin{cases}(x-x_0)\left[\dfrac{(x+x_0)}{a^2}+\dfrac{m(y+y_0)}{b^2}\right]=0\\ y-y_0=m(x-x_0)\end{cases}$$

Tale sistema ha sempre come soluzione la coppia $P_0(x_0,y_0)$.Dividendo la 1^ equazione per $(x - x_0) \neq 0$ otteniamo:

$$\begin{cases}\dfrac{(x+x_0)}{a^2}+\dfrac{m(y+y_0)}{b^2}=0\\ y-y_0=m(x-x_0)\end{cases}$$

Sistema sempre soddisfatto dalle coordinate di $P_0(x_0,y_0)$, quindi sostituendo nella 1^ equazione i valori delle coordinate di $P_0$ al posto di x ed y si avrà:

$$\frac{2x_0}{a^2}+m\frac{2y_0}{b^2}=0$$ e ottenendo infine per m il valore

$$m=-\frac{2x_0}{a^2}\frac{b^2}{2y_0}=-\frac{b^2}{a^2}\frac{x_0}{y_0}$$

sostituendo questo valore nella 2^ equazione, retta tangente in $P_0$ abbiamo:

$y - y_0 = -\dfrac{b^2}{a^2}\dfrac{x_0}{y_0}\,(x - x_0)$ da cui ricaviamo

$$a^2y_0y - a^2{y_0}^2 = -b^2x_0x + b^2{x_0}^2$$

$$a^2y_0y + b^2x_0x = a^2{y_0}^2 + b^2{x_0}^2$$

ed essendo valida la **(*)** abbiamo $a^2y_0^2 + b^2x_0^2 = a^2b^2$

sostituendo si otterrà l'equazione $b^2x_0x + a^2y_0y = a^2b^2$

dividendo per $a^2b^2$ otteniamo l'equazione cercata $\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = 1$

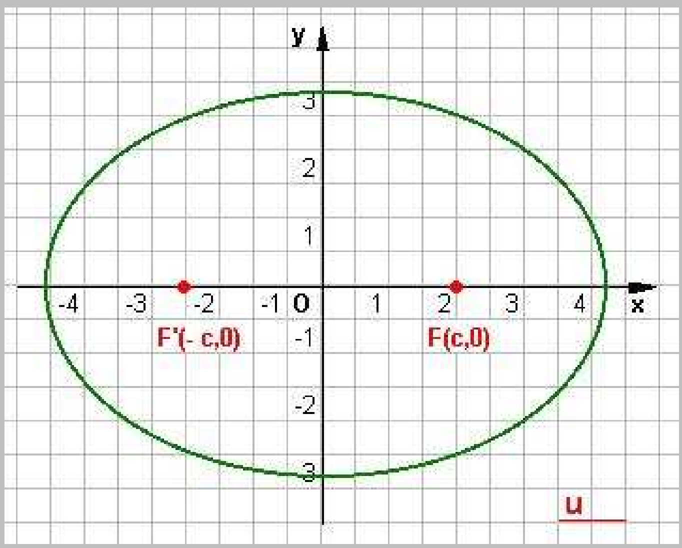
## Condizioni per determinare l'equazione di un'ellisse.

Poiché nell'equazione $\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} = 1$ compaiono due coefficienti a e b, sono necessarie due condizioni indipendenti per determinare l'equazione di un'ellisse riferita ai suoi assi di simmetria.
Indichiamo alcuni dei casi che possono presentarsi:

1) passaggio dell'ellisse per due punti (non simmetrici rispetto agli assi o rispetto all'origine);
2) conoscenza della coordinata di un fuoco e di un vertice;
3) conoscenza dela eccentricità e passaggio per un punto;
4) conoscenza della misura di un semiasse e dell'eccentricità.

Osservazione: Per determinare l'equazione della conica allora serve costruire un sistema di due equazioni nelle due incognite a e b.

## Eccentricità dell'ellisse




Si definisce eccentricità dell'ellisse il rapporto

$$e = \frac{c}{a}.$$

Essendo $b^2 = a^2 - c^2$, cioè $c^2 = a^2 - b^2$
Si avrà

$$e = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}$$

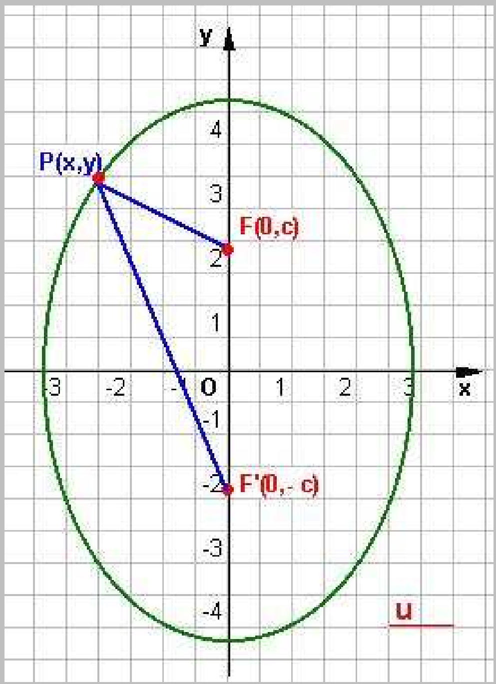
e quindi $0 \le e < 1$

In particolare, se $e = \frac{c}{a} = 0$, ne consegue che c = 0 e quindi F = F' = O (fuochi coincidenti con il centro); inoltre $a^2 = b^2$ e l'equazione $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ diventa $x^2 + y^2 = a^2$

Questa equazione rappresenta una circonferenza di raggio a; quindi la circonferenza si può considerare come un caso particolare di una ellisse i cui fuochi coincidono col centro; oppure si può dire che la circonferenza è una ellisse di eccentricità $e = 0$.

Inoltre, essendo $e = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}$, si ricava che, quanto più il rapporto $\frac{b}{a}$ si avvicina a zero, cioè quanto più a è grande rispetto a b, tanto più l'eccentricità si avvicina a 1. Pertanto l'eccentricità e può assumersi come la misura dello schiacciamento dell'ellisse sull'asse maggiore.
In generale si verifica che al crescere di e l'ellisse si schiaccia sempre più.
Il caso e = 1 corrisponde alla eccentricità della parabola, il caso e > 1 corrisponde alla eccentricità dell'iperbole.

## Ellisse coi fuochi sull'asse y




Se P(x,y) è un generico punto appartenente all'ellisse, indicata con 2b (b > 0) la somma costante delle distanze di P dai due fuochi F, F' risulta:

$$PF' + PF = 2b.$$

Si ottiene l' equazione del tipo $$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

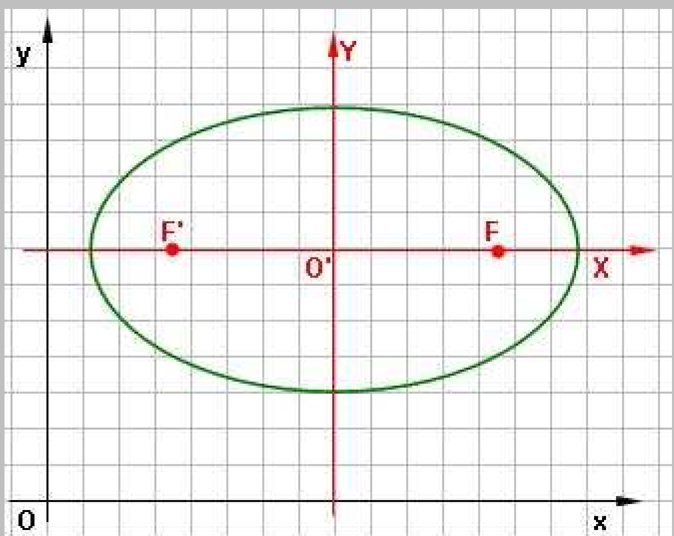
con **a < b** che rappresenta ancora un'ellisse avente per asse di simmetria gli assi cartesiani; i fuochi si trovano ora sull'asse delle y e sono i punti

$$F(0,c),\ F'(0,-c).$$

In questo caso $c^2 = b^2 - a^2$ ed $e = \frac{c}{b} = \sqrt{1 - \frac{a^2}{b^2}}$.

## Ellisse traslata

Un' ellisse si definisce traslata se i suoi assi sono paralleli agli assi cartesiani.




Determiniamo l'equazione di una ellisse così posizionata, come in figura a lato, con le seguenti caratteristiche:

1) O'(α,β) centro dell'ellisse;
2) F(α + c,β) ed F'(α – c,β) i fuochi;
3) P(x,y) generico punto dell'ellisse.

Per definizione sappiamo che:

$$PF + PF' = 2a$$

da cui:

$$\sqrt{(x-\alpha-c)^2+(y-\beta)^2}+\sqrt{(x-\alpha+c)^2+(y-\beta)^2}=2a$$

Procediamo trasportando a secondo membro il primo radicale ed elevando al quadrato ambo i membri

$$(\sqrt{(x-\alpha+c)^2+(y-\beta)^2})^2=(2a-\sqrt{(x-\alpha-c)^2+(y-\beta)^2})^2$$
$$(x-\alpha+c)^2+(y-\beta)^2=4a^2-4a\sqrt{(x-\alpha-c)^2+(y-\beta)^2}+(x-\alpha-c)^2+(y-\beta)^2$$
$$(x-\alpha+c)^2-(x-\alpha-c)^2-4a^2=-4a\sqrt{(x-\alpha-c)^2+(y-\beta)^2}$$
$$(x-\alpha)^2+c^2+2c(x-\alpha)-\left[(x-\alpha)^2+c^2-2c(x-\alpha)\right]-4a^2=-4a\sqrt{(x-\alpha-c)^2+(y-\beta)^2}$$
$$(x-\alpha)^2+c^2+2c(x-\alpha)-(x-\alpha)^2-c^2+2c(x-\alpha)-4a^2=-4a\sqrt{(x-\alpha-c)^2+(y-\beta)^2}$$
$$+2c(x-\alpha)+2c(x-\alpha)-4a^2=-4a\sqrt{(x-\alpha-c)^2+(y-\beta)^2}$$
$$+4c(x-\alpha)-4a^2=-4a\sqrt{(x-\alpha-c)^2+(y-\beta)^2}$$

Elevando ancora al quadrato i due membri, e semplificando:

$$\left[c(x-\alpha)-a^2\right]^2=\left[-a\sqrt{(x-\alpha-c)^2+(y-\beta)^2}\right]^2$$
$$c^2(x-\alpha)^2+a^4-2ca^2(x-\alpha)=a^2\left[(x-\alpha-c)^2+(y-\beta)^2\right]$$
$$c^2(x-\alpha)^2+a^4-2ca^2(x-\alpha)=a^2\left[(x-\alpha)^2+c^2-2c(x-\alpha)+(y-\beta)^2\right]$$
$$c^2(x-\alpha)^2+a^4-2ca^2(x-\alpha)=a^2(x-\alpha)^2+a^2c^2-2ca^2(x-\alpha)+a^2(y-\beta)^2$$

e semplificando, si ottiene:

$$c^2(x-\alpha)^2+a^4=a^2(x-\alpha)^2+a^2c^2+a^2(y-\beta)^2$$
$$c^2(x-\alpha)^2-a^2(x-\alpha)^2-a^2(y-\beta)^2=-a^4+a^2c^2$$
$$(x-\alpha)^2(c^2-a^2)-a^2(y-\beta)^2=a^2(c^2-a^2)$$

ponendo $c^2 - a^2 = - b^2$ si ottiene:

$$-b^2(x-\alpha)^2-a^2(y-\beta)^2=-a^2b^2$$
$$b^2(x-\alpha)^2+a^2(y-\beta)^2=a^2b^2 \qquad (*)$$

da cui con ultimi passaggi

$$b^2(x^2-2x\alpha+\alpha^2)+a^2(y^2-2y\beta+\beta^2)=a^2b^2$$
$$b^2x^2-2xb^2\alpha+b^2\alpha^2+a^2y^2-2a^2y\beta+a^2\beta^2=a^2b^2$$

ordinando

$$b^2x^2+a^2y^2-2\alpha b^2x-2a^2\beta y+b^2\alpha^2+a^2\beta^2-a^2b^2=0$$

ed è una equazione algebrica di 2° grado, con i coefficienti di $x^2$ e $y^2$ concordi e mancante del termine rettangolare in xy.

La (*) con la traslazione di equazioni: $\begin{cases} X = x-\alpha \\ Y = y-\beta \end{cases}$

si trasforma in $\frac{X^2}{a^2}+\frac{Y^2}{b^2}=1$ equazione in forma normale della stessa ellisse nel riferimento O'XY.

Viceversa, consideriamo un'equazione algebrica di 2° grado del tipo:

$$mx^2 + ny^2 + px + qy + r = 0 \qquad (**)$$

mancante del termine rettangolare xy e con m ed n concordi e positivi ( se non lo sono basterà cambiare di segno ad entrambi i membri della (**)).

Con l'artificio di sommare ad ambo i membri della (**) i numeri $\frac{p^2}{4m}$ e $\frac{q^2}{4n}$ al fine di individuare al primo membro dei quadrati di binomi:

$$mx^2 + ny^2 + px + qy + \frac{p^2}{4m} + \frac{q^2}{4n} = \frac{p^2}{4m} + \frac{q^2}{4n} - r$$

$$mx^2 + px + \frac{p^2}{4m} + ny^2 + qy + \frac{q^2}{4n} = \frac{p^2}{4m} + \frac{q^2}{4n} - r$$

$$m(x + \frac{p}{2m})^2 + n(y + \frac{q}{2n})^2 = \frac{p^2}{4m} + \frac{q^2}{4n} - r$$

che rappresenta un'ellisse traslata se la quantità a secondo membro risulta:

$$\frac{p^2}{4m} + \frac{q^2}{4n} - r > 0$$

allora sotto questa ipotesi dal confronto della

$$b^2(x-\alpha)^2 + a^2(y-\beta)^2 = a^2b^2$$

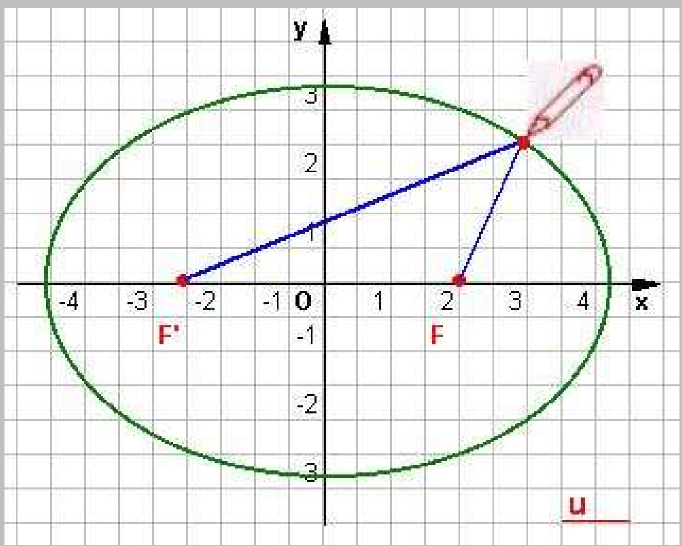
con la $\qquad m(x + \frac{p}{2m})^2 + n(y + \frac{q}{2n})^2 = \frac{p^2}{4m} + \frac{q^2}{4n} - r$

ricaviamo le coordinate del centro O'(α,β) dell'ellisse (**), cioè:

$$\alpha = -\frac{p}{2m} \ ; \ \beta = -\frac{q}{2n}.$$

Questi valori, sostituiti nella : $\begin{cases} x = X - \frac{p}{2m} \\ \\ y = Y - \frac{q}{2n} \end{cases}$ che permettono di trasformare la (**) a forma normale.

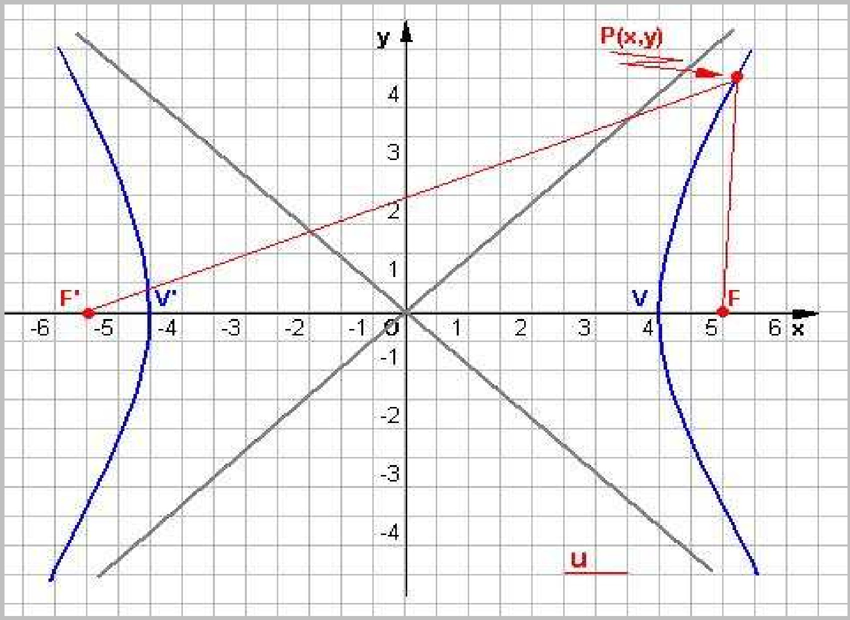
## Costruzioni dell'ellisse




**1)**Segnati sul piano i due fuochi F', F si prenda un filo di lunghezza 2a e si fissino le estremità di questo, in F' ed F (come in figura). Si faccia poi scorrere la punta della matita in modo che essa si appoggi costantemente al filo e che questo sia teso. Si verrà in tal modo a tracciare sul piano una curva i cui punti hanno dai fuochi distanze la cui somma è uguale alla lunghezza del filo, cioè si viene a tracciare un'ellisse.

**2)**Poichè la conica è simmetrica rispetto agli assi coordinati, basta studiare l'andamento della curva nel primo quadrante, dove le coordinate di un punto sono entrambe positive. Per ottenere la massima esattezza nel disegno della curva, dopo aver visto l'andamento, si potranno calcolare le coordinate di alcuni suoi punti utilizzando l'equazione canonica.

## L'iperbole: definizione analitica




L'**iperbole** è una conica definita come il luogo dei punti del piano per i quali è costante la differenza delle distanze da due punti fissi detti **fuochi**.

Sia 2a (a > 0) in valore assoluto la misura della differenza delle distanze di un punto P(x,y) della curva dai due fuochi di coordinate F(c,0), F'(–c,0) e sia

$$2c = F'F$$

la distanza di questi due punti.

Si assume come retta dei fuochi l'asse delle x e l'origine degli assi coincidente con il punto medio del segmento FF'. Applicando la definizione, un punto P(x,y) appartiene alla conica se e solo se le sue coordinate soddisfano la condizione:

$$|PF' - PF| = 2a \quad ;$$

E' evidente (ricordando che in un triangolo un lato è maggiore della differenza degli altri due) che si deve supporre $2c > 2a$, cioè $c > a$ proprio perchè nel triangolo F'PF il lato F'F è maggiore della differenza degli altri due ne consegue che la differenza $c^2 - a^2$ è positiva ed è lecito porre:

$$c^2 - a^2 = b^2,$$

applicando la formula della distanza tra due punti, analiticamente risulta

$$\left|\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2}\right| = 2a$$

cioè
$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = \pm 2a$$

ossia
$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = \pm 2a + \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

elevando al quadrato ambo i membri abbiamo

$$x^2 + 2cx + c^2 + y^2 = 4a^2 + x^2 - 2cx + c^2 + y^2 \pm 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

quindi riducendo i termini simili e dividendo per 4

$$\pm a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = a^2 - cx$$

ed ancora, per eliminare il radicale quadreremo, ottenendo

$$a^2(x^2 - 2cx + c^2 + y^2) = a^4 - 2a^2cx + x^2c^2$$

moltiplicando e mettendo a fattor comune avremo

$$(c^2 - a^2)x^2 - a^2y^2 = a^2(c^2 - a^2)$$

per quanto posto si ottiene l'equazione del luogo geometrico

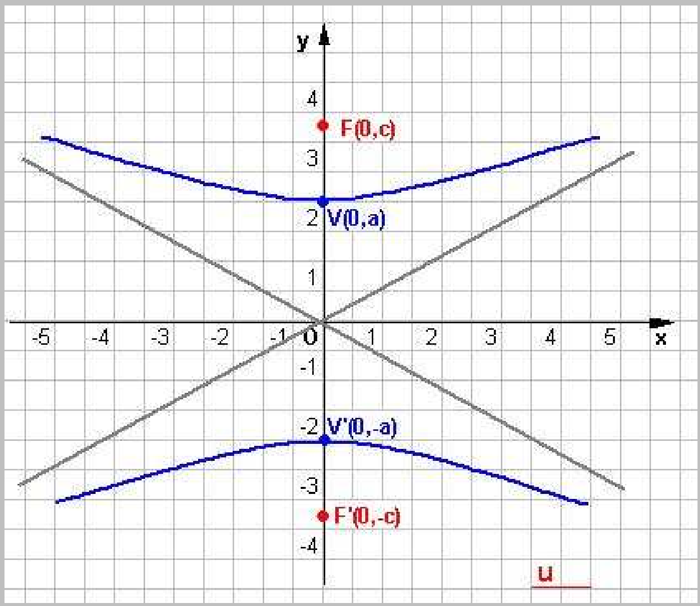
$$b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2,$$

da cui dividendo tutti i termini per $a^2b^2$, si ottiene

$$(1) \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

La (1) è l'**equazione** della iperbole riferita al centro e agli assi avente i fuochi sull'asse x, **in forma canonica o normale**.

## Iperbole con i fuochi sull'asse y




Analogamente se i due fuochi sono posti sull'asse y, la conica è rappresentata dall'equazione $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1$

avendo posto |PF'– PF| = 2b e

$c^2 - b^2 = a^2$.

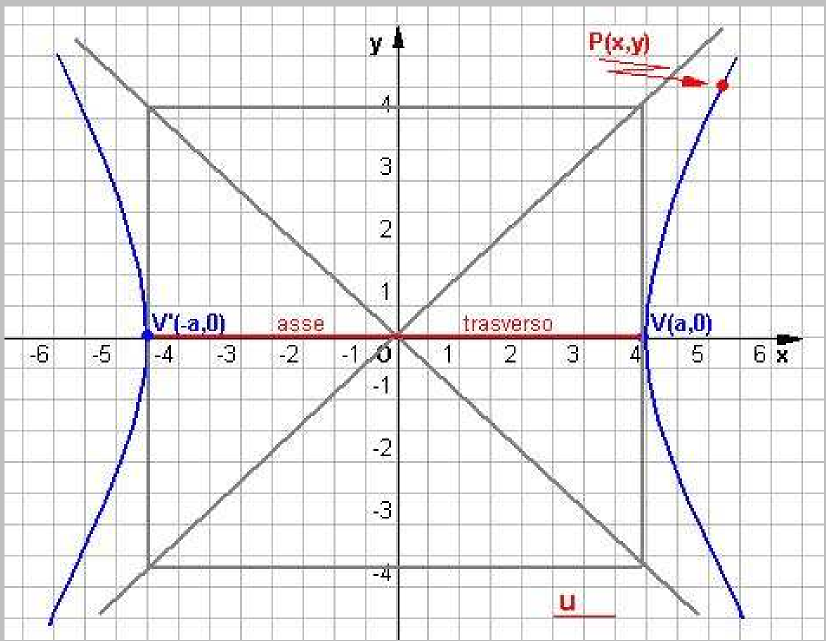
I vertici hanno coordinate

V(0,a), V'(0, –a),

i fuochi

F(0,c), F'(0, –c).

## Simmetrie e proprietà dell'iperbole




1) Simmetria rispetto assi coordinati.

Poichè scambiando x in –x e y in –y l'equazione resta inalterata, *l'iperbole è una curva simmetrica rispetto a ciascuno degli assi e rispetto all'origine*.

L' asse delle x si chiama *asse trasverso* e l'asse delle y *asse non trasverso*. L'origine O si dice *centro dell'iperbole*.

2) Intersezioni con gli assi

Ponendo a sistema l'equazione della curva con l'asse delle x, cioè y = 0, si trova x = ± a .

L'asse trasverso interseca quindi l'iperbole in due punti di ascissa – a e + a.

I due punti V( a , 0 ) V'(–a , 0 ) si dicono **vertici** dell'iperbole; a è la lunghezza del semiasse trasverso.

L'asse delle ordinate non interseca l'iperbole, infatti se nell'equazione canonica dell'iperbole si pone $x = 0$ si trova $-\frac{y^2}{b^2} = 1$ che non ha soluzioni reali.

Da quanto scritto deduciamo che l'iperbole, sia con i fuochi sull'asse x che quella con i fuochi sull'asse y hanno sempre come asse traverso l'asse focale.

3) L'iperbole è una curva illimitata.

L'iperbole è una curva tutta esterna alla striscia di piano limitata dalle rette $x = -a$ , $x = a$.

Infatti dalla equazione canonica dell'iperbole con i fuochi sull'asse x si ricava

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}(x^2 - a^2)$$

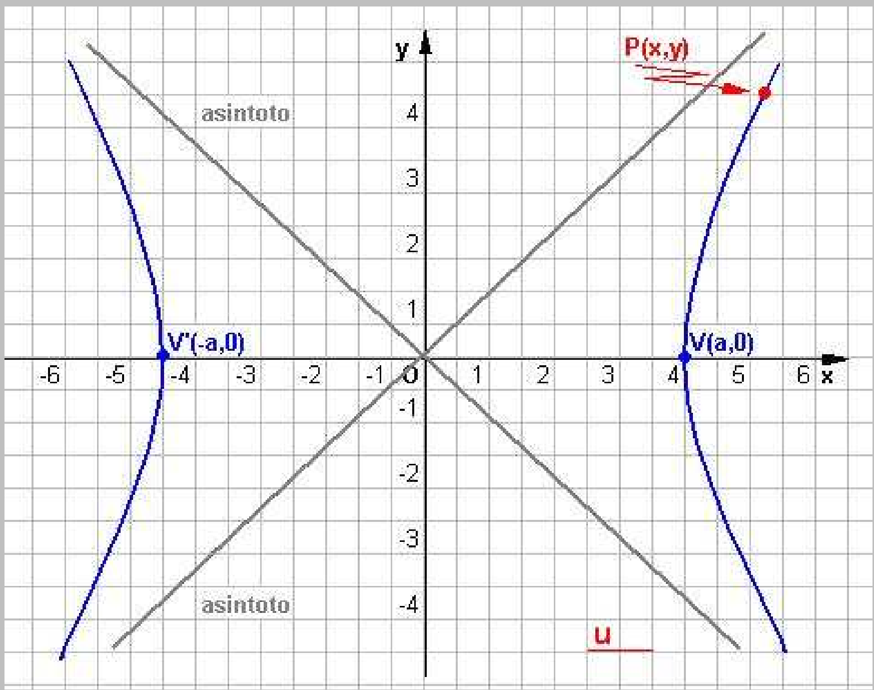
Poichè il primo membro è sempre positivo o nullo, tale deve risultare anche il secondo; deve quindi essere $x^2 - a^2 \geq 0$, cioè $x^2 \geq a^2$ da cui: $x \leq a$ , oppure : $x \geq a$ .

4) Determinazione dei fuochi note le misure dei semiassi.

Dalla relazione $c^2 - a^2 = b^2$, si ottiene $c = \pm\sqrt{a^2 + b^2}$ che è la formula cercata.

## Asintoti all'iperbole

Le rette di equazioni $y = +\frac{b}{a}x$ $\quad y = -\frac{b}{a}x$ si chiamano **asintoti**.




Tali rette non intersecano mai l'iperbole, ma ad essa si avvicinano indefinitamente a mano mano che ci si allontana dall'origine. Geometricamente ciò significa che quando un punto generico P della curva, si allontana indefinitamente lungo la curva, la distanza di P dall'asintoto diviene sempre più piccola ( tende a zero ).

Si osserva inoltre che l'iperbole giace tutta nell'angolo formato dagli asintoti, che contiene l'asse x.

Nel caso di iperbole avente i fuochi sull'asse y di equazione

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1$$

gli asintoti hanno ancora espressione $y = +\frac{b}{a}x$ $\quad y = -\frac{b}{a}x$

Ebbene analizziamo quanto espresso sinteticamente dal punto di vista analitico.

Consideriamo dapprima l'equazione $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ e sia $y = mx$ la retta generica passante per O.

Cerchiamo le intersezioni tra tale retta e l'iperbole.

Risolvendo il sistema:

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \\ y = mx \end{cases}$$

si ottengono le soluzioni: $x = \pm \frac{ab}{\sqrt{b^2 - a^2m^2}}$ e $y = \pm \frac{mab}{\sqrt{b^2 - a^2m^2}}$

Si possono presentare i tre casi seguenti:

I°) $b^2 - a^2m^2 > 0$ cioè $-\frac{b}{a} < m < \frac{b}{a}$

In tal caso i valori che si ottengono dal sistema sono reali, cioè la retta y = mx interseca l'iperbole in due punti reali e distinti.

II°) $b^2 - a^2m^2 = 0$ cioè $m = \pm\frac{b}{a}$

Le rette aventi tali coefficienti angolari $y = +\frac{b}{a}x$ $y = -\frac{b}{a}x$ si dicono asintoti dell'iperbole.

Come già affermato precedentemente, tali rette possono pensarsi come tangenti all'iperbole in punti a distanza infinitamente grande dall'origine.

III°) $b^2 - a^2m^2 < 0$ cioè $m < -\frac{b}{a}$ ; $m > \frac{b}{a}$

In tal caso il sistema non ha soluzioni reali, cioè la retta non interseca la retta.

Si deduce che:

a) i punti della curva sono contenuti nell'angolo formato dai due asintoti e contenente l'asse x (asse focale).

b) Gli asintoti, avendo coefficienti angolari $\pm\frac{b}{a}$, sono le diagonali del rettangolo avente per lati le rette $x = \pm a$ , $y = \pm b$.

In modo del tutto analogo se l'iperbole ha i fuochi sull'asse y avremo il sistema:

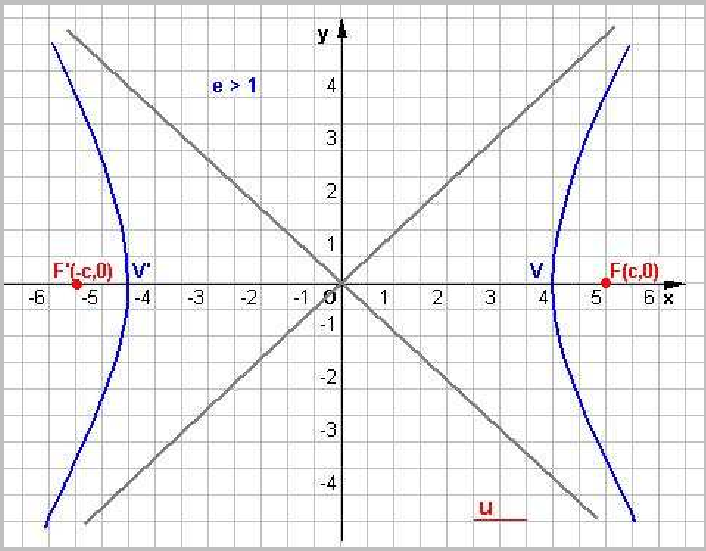
$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1 \\ y = mx \end{cases} \qquad \begin{cases} \frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1 \\ y = mx \end{cases}$$

che ha per soluzioni $x = \pm \frac{ab}{\sqrt{a^2m^2 - b^2}}$ e $y = \pm \frac{mab}{\sqrt{a^2m^2 - b^2}}$

Gli asintoti sono ancora le rette $y = +\frac{b}{a}x$ $y = -\frac{b}{a}x$

e la retta interseca l'iperbole per $m < -\frac{b}{a}$ ; $m > \frac{b}{a}$

## Eccentricità dell'iperbole




Il rapporto $e = \frac{c}{a}$

dicesi **eccentricità** dell'iperbole,
nel caso in cui **a > b** cioè per l'iperbole

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

altrimenti tale

rapporto diviene $e = \frac{c}{b}$

nel caso in cui **a < b** cioè per l'iperbole

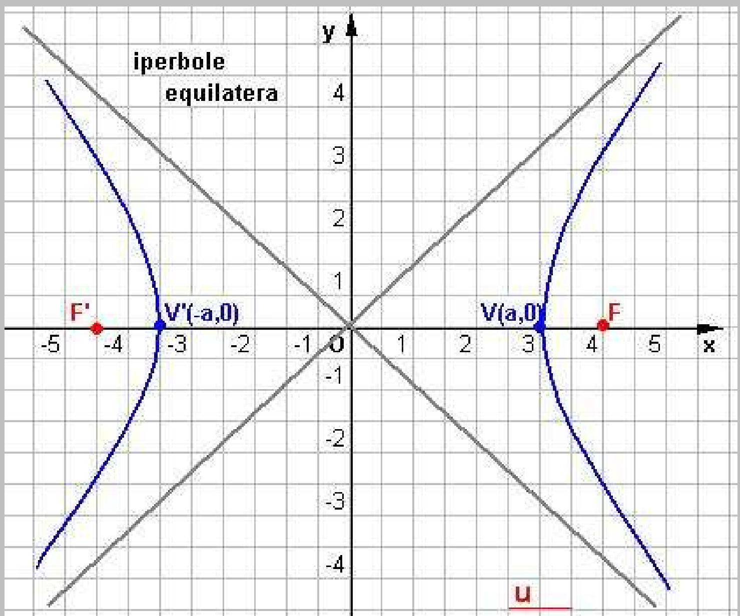
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1.$$

Essendo $b^2 = c^2 - a^2$, cioè $c^2 = b^2 + a^2$

si ricava: $e = \frac{\sqrt{b^2 + a^2}}{a} = \sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}} > 1$ 2) $e = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a} = \sqrt{1 + \frac{a^2}{b^2}} > 1$

L'eccentricità dell'iperbole ha un significato geometrico del tutto analogo a quello dell'eccentricità dell'ellisse, e questo rapporto è sempre maggiore di uno.
Se l'iperbole è equilatera l'eccentricità vale $e = \sqrt{2}$

## Iperbole equilatera




Se a = b, ovvero se le lunghezze dei semiassi trasverso e non trasverso sono uguali, allora l'equazione canonica dell'iperbole assume la forma

$$\mathbf{x^2 - y^2 = a^2}$$

che è l'equazione dell'**iperbole equilatera** riferita ai propri assi (cioè gli assi di simmetria della curva sono gli assi coordinati ).

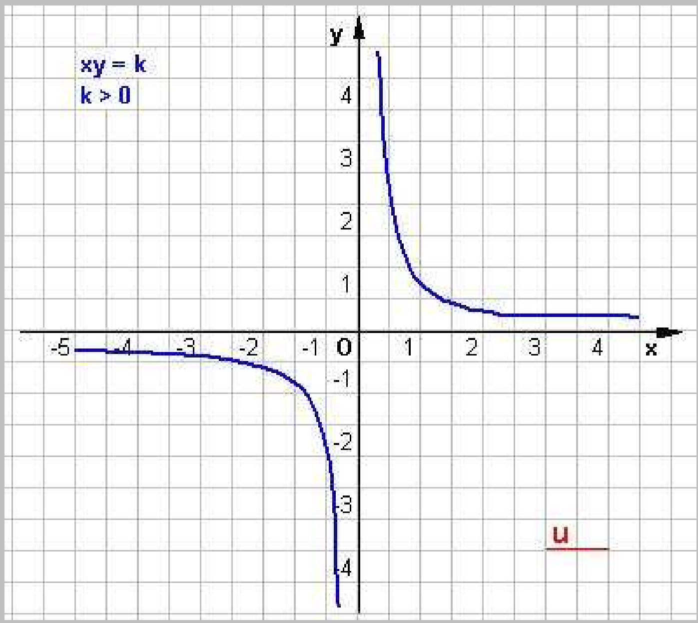
Le equazioni degli asintoti in questo caso sono

$$y = x, \quad y = -x.$$

Gli asintoti della curva coincidono con le bisettrici dei quadranti.

I fuochi hanno coordinate $F(a\sqrt{2}, 0)$ $F'(-a\sqrt{2}, 0)$ i vertici V( a, 0 ) V'(– a, 0 ) .
In generale una iperbole comunque situata rispetto agli assi coordinati si dice **equilatera** quando i suoi asintoti sono perpendicolari.

## Iperbole equilatera riferita ai propri asintoti




Nel caso in cui gli assi cartesiani siano gli asintoti (x = 0 , y = 0) della curva, l'equazione della iperbole assume una forma particolare e notevole:

(1) $xy = k$
con k costante positiva o negativa.

Se $k > 0$ la curva è situata nel 1° e 3° quadrante;

se $k < 0$ la curva è situata nel 2° e 4° quadrante.

E' facile osservare che la curva è simmetrica rispetto all'origine.
Osservando che l'iperbole studiata non ha nessun punto di ascissa nulla, potremo scrivere la (1) come $y = \frac{k}{x}$

che è nota come legge della proporzionalità inversa.

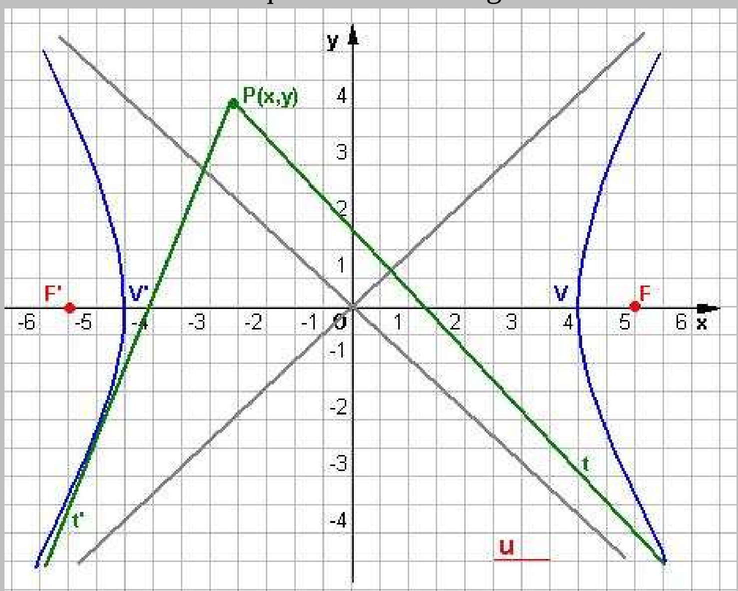
## Intersezioni dell'iperbole con una retta

Per trovare l'intersezione dell'iperbole con una retta, basta far sistema fra l'equazione dell'iperbole e quella della retta. Analogamente a quanto visto per l'ellisse, si hanno tre casi, secondo il valore del discriminante dell'equazione risolvente, e precisamente:

1) Se è $\Delta > 0$, si hanno due intersezioni distinte e la *retta è secante*.
2) Se è $\Delta = 0$, si hanno due intersezioni coincidenti nello stesso punto; la *retta è tangente*.
3) Se è $\Delta < 0$, non si hanno soluzioni reali, quindi la *retta è esterna*.

## Tangenti ad una iperbole

Per determinare le equazioni delle tangenti condotte da un punto generico P(x,y) ad una iperbole, si procede come per l'ellisse.




In particolare, se il punto P'(x',y') appartiene alla curva, l'equazione della tangente in P all'iperbole è:

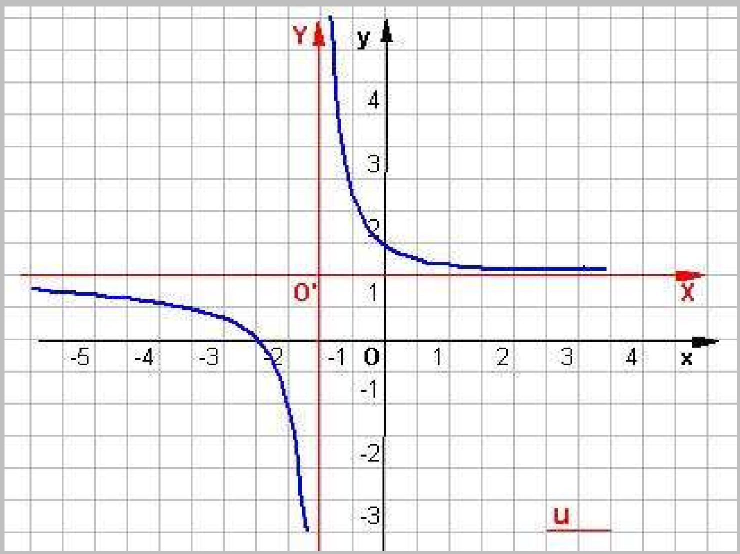
$$\textbf{(*)}\quad \frac{xx'}{a^2} - \frac{yy'}{b^2} = 1$$

Se il punto P'(x',y') appartiene all'iperbole di equazione xy = k, allora l'equazione della tangente in P' all'iperbole è $\frac{x\,y' + x'\,y}{2} = k$

La formula **(*)** è detta di **sdoppiamento**, è ottenibile analogamente a quella vista per l'ellisse, ma visti i molteplici aspetti che le equazioni delle iperboli possono assumere elenchiamo una tabella riassuntiva :

| Formula di sdoppiamento | Equaz. dell'iperbole a cui è riferita |
|---|---|
| $\frac{xx_0}{a^2}-\frac{yy_0}{b^2}=1$ | $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ |
| $\frac{xx_0}{a^2}-\frac{yy_0}{b^2}=-1$ | $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=-1$ |
| $xx_0 - yy_0 = a^2$ | $x^2 - y^2 = a^2$ |
| $xx_0 - yy_0 = - a^2$ | $x^2 - y^2 = - a^2$ |
| $xy_0 - x_0y - 2k = 0$ | $xy = k$ |

## La funzione omografica (iperbole equilatera traslata)




Sia data la funzione $y=\frac{ax+b}{cx+d}$

Si tratta di una funzione algebrica razionale fratta di secondo grado definita per $x\neq-\frac{d}{c}$ funzione detta anche **omografica**.

Ricorrendo alla traslazione di assi di equazioni

$$\begin{cases} x = X-\frac{d}{c} \\ y = Y+\frac{a}{c} \end{cases}$$

la funzione omografica si trasforma in $XY=\frac{bc-ad}{c^2}$ ossia $XY=k$ che rappresenta l'equazione di una iperbole equilatera riferita ai propri asintoti i quali coincidono con gli assi del sistema traslato e rispetto al sistema originario sono le rette di equazione $x=-\frac{d}{c}$ $y=\frac{a}{c}$.

Quanto espresso in modo sintetico necessita di una analisi più approfondita per mostrare un approccio più consono dal punto di vista matematico.

Ebbene studiamo l'equazione $y=\frac{ax+b}{cx+d}$ dove i coefficienti a, b, c e d sono costanti assegnate, con c e d non contemporaneamente nulli; dimostriamo che, a seconda dei valori assunti dai coefficienti , essa rappresenta o una retta o una iperbole equilatera con assi di simmetria paralleli agli assi cartesiani.

Si possono verificare i seguenti casi:

1) Sia $c = 0$ e $d \neq 0$ per cui l'equazione data diventa $y=\frac{a}{d}x+\frac{b}{d}$

che rappresenta una retta di coefficiente angolare $m = \frac{a}{d}$.

2) Sia $c \neq 0$ e $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - cb = 0$ da cui risulta $ad = cb$ cioè $\frac{a}{c}=\frac{b}{d}=k$ e quindi

$a = kc$ e $b = kd$; sostituendo questi valori all'interno dell'equazione data abbiamo:

$$y=\frac{ax+b}{cx+d}=\frac{kcx+kd}{cx+d}=k\bullet\frac{cx+d}{cx+d}=k \quad \text{con} \quad x\neq-\frac{d}{c}$$

La conclusione è ovvia l'equazione è ancora una retta $y = k$ parallela all'asse x, non definita nel punto di ascissa $x \neq -\frac{d}{c}$.

3) Sia $c \neq 0$ e $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - cb \neq 0$, ebbene in questo caso operiamo una traslazione di assi che porti O in O', e dalle formule già scritte abbiamo:

$$\begin{cases} x = X - \dfrac{d}{c} \\ y = Y + \dfrac{a}{c} \end{cases}$$

sostituiamo questi valori nell'equazione data ottenendo: $y = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ ;

$$Y + \frac{a}{c} = \frac{a(X - \frac{d}{c}) + b}{c(X - \frac{d}{c}) + d}$$

$$Y + \frac{a}{c} = \frac{aX - \frac{ad}{c} + b}{cX - \frac{cd}{c} + d} = \frac{aX - \frac{ad}{c} + b}{cX - d + d} = \frac{aX - \frac{ad}{c} + b}{cX}$$

quindi
$$cX(Y + \frac{a}{c}) = aX - \frac{ad}{c} + b$$

$$cXY + cX\frac{a}{c} = aX - \frac{ad}{c} + b$$

$$cXY + aX = aX - \frac{ad}{c} + b$$

$$XY = -\frac{ad}{c^2} + \frac{b}{c} = -\frac{ad + bc}{c^2} = k$$

Il che dimostra che l'equazione data rappresenta un'iperbole equilatera traslata avente come centro di simmetria $O'(-\frac{d}{c};\frac{a}{c})$ e per asintoti $x = -\frac{d}{c}$ $\quad y = \frac{a}{c}$.

## Condizioni generali per determinare l'equazione di una iperbole.

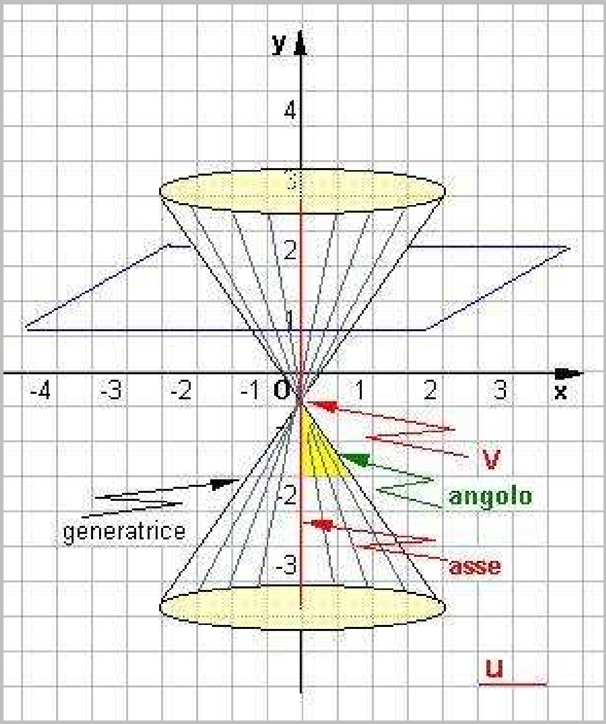
Per determinare l'equazione di una iperbole riferita ai suoi assi di simmetria, cioè del tipo $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ o $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1$, sono necessarie due condizioni, comparendo in esse due soli coefficienti a e b.

Indichiamo allora alcuni dei casi che possono presentarsi :

1) Passaggio per due punti ( non simmetrici rispetto agli assi agli assi o rispetto all'origine)
2) Conoscenza delle coordinate di un fuoco e dell'equazione di un asintoto
3) Conoscenza delle coordinate di un vertice e di un fuoco.

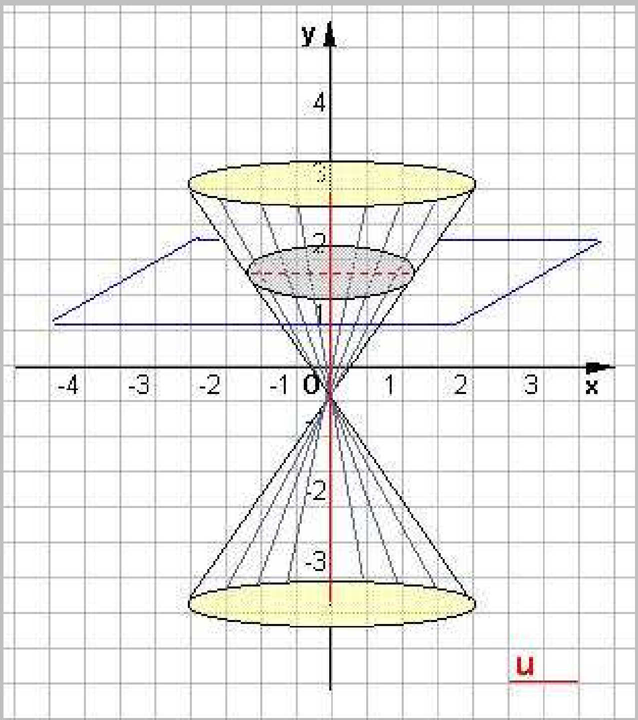
Per determinare l'equazione di una iperbole equilatera, sia del tipo $x^2 - y^2 = a^2$ o $x^2 - y^2 = -a^2$ oppure $xy = k$ è sufficiente una sola condizione, che non sia la conoscenza degli asintoti e dell'eccentricità, costante per ogni iperbole equilatera, ma che può essere data, per esempio, dal passaggio per un dato punto o dalla tangenza ad una retta.

# Introduzione alle Coniche

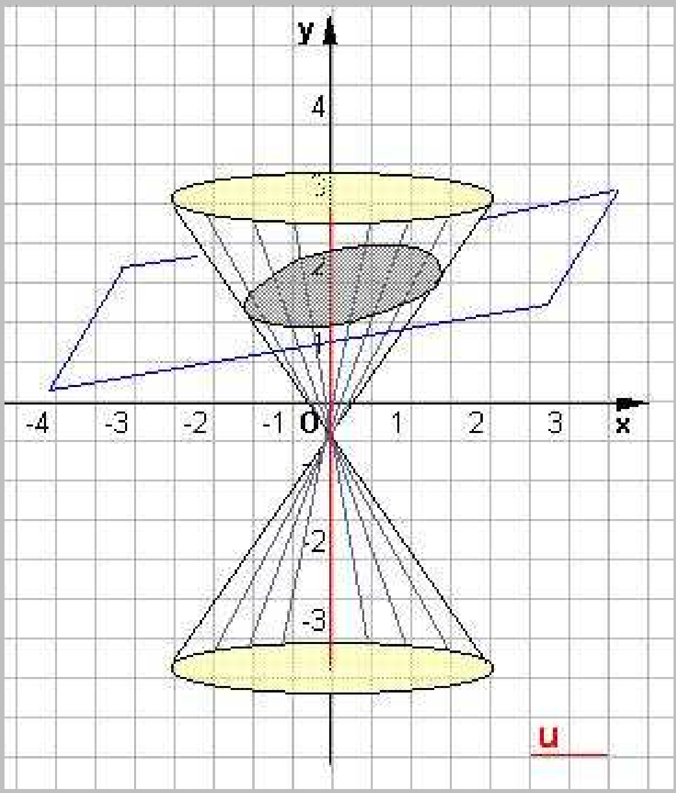



Siano a ed r due rette dello spazio intersecantesi in un punto V, formanti un angolo B minore di 90°. Si chiama superficie conica indefinita la superficie generata in una rotazione completa, della retta r attorno alla retta a. Le due porzioni della superficie conica si chiamano falde.
La retta **a** è detta **asse**, la retta r si chiama **generatrice**, e l'angolo **B apertura della superficie conica**.
Le intersezioni ottenute tagliando una superficie conica con un piano si dicono coniche.

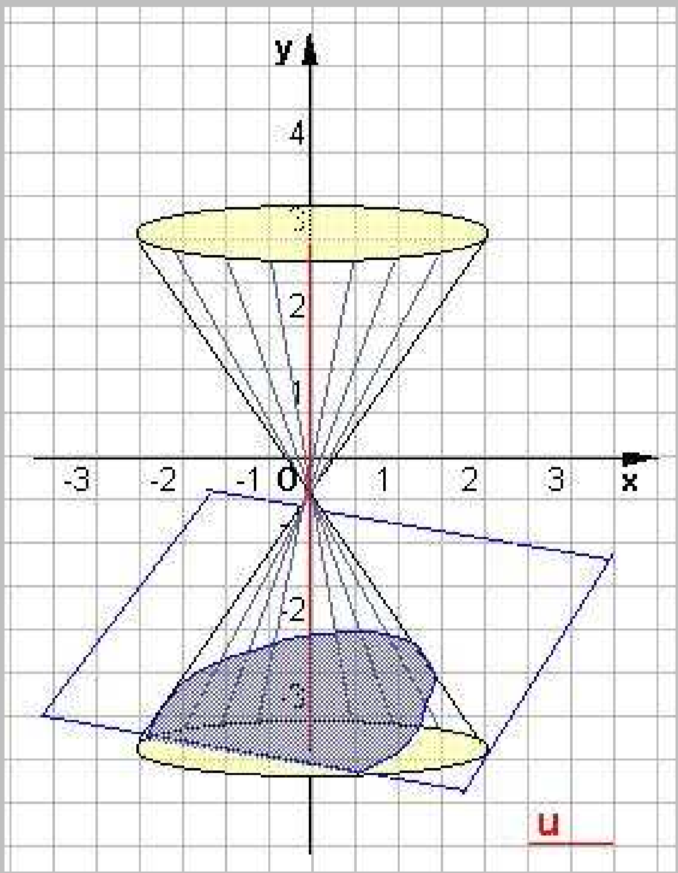
Precisamente:



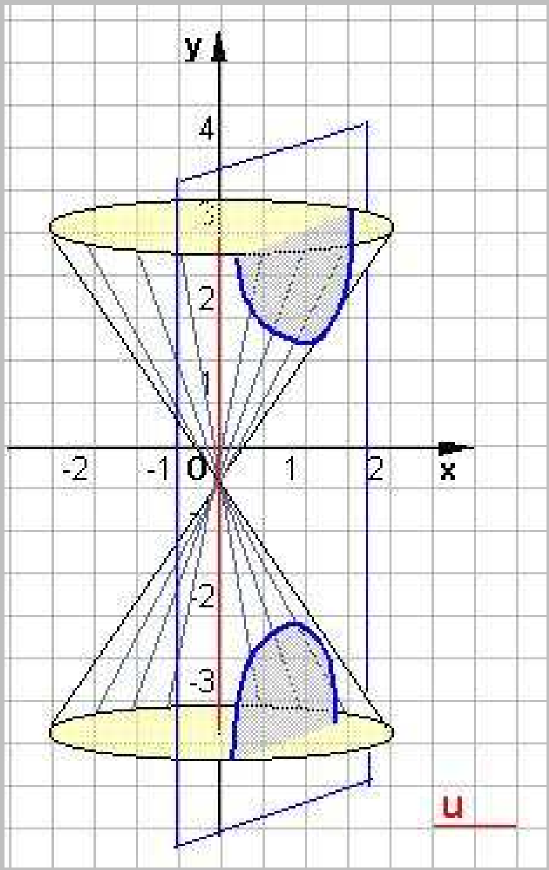

Se il piano secante è perpendicolare all'asse della superficie conica, la sezione è una circonferenza;




se il piano forma con l'asse un angolo maggiore dell'angolo di apertura e diverso da 90° la sezione è una ellisse;




se il piano secante è parallelo alla generatrice la sezione si chiama parabola;




se il piano secante è parallelo all'asse a la sezione è una iperbole.

## Le coniche come riconoscerle

Ogni conica è un opportuno luogo geometrico rappresentato da una equazione algebrica del tipo:

$$ax^2 + by^2 + cxy + dx + ey + f = 0$$

Il nostro studio generale si limiterà a considerare curve rappresentate da equazioni del tipo

$$ax^2 + by^2 + 2cx + 2dy + e = 0$$

con a e b non contemporaneamente nulli, equazioni mancanti cioè, rispetto al caso generale, del termine rettangolare xy.

In alcuni casi particolari, che ora esaminiamo, l'equazione scritta rappresenta le curve già viste.

**1° caso a = b**

l'equazione $ax^2 + by^2 + 2cx + 2dy + e = 0$

rappresenta una **circonferenza.**

**2° caso a = 0; b ≠ 0; c ≠ 0**

l'equazione $ax^2 + by^2 + 2cx + 2dy + e = 0$ diventa

$$by^2 + 2cx + 2dy + e = 0$$

cioè

$$x = -\frac{b}{2c}y^2 - \frac{d}{c}y - \frac{e}{2c}$$

equazione che rappresenta una **parabola** con asse di simmetria parallelo all'asse x.

**3° caso b = 0; a ≠ 0; d ≠ 0**

l'equazione $ax^2 + by^2 + 2cx + 2dy + e = 0$ diventa

$$ax^2 + 2cx + 2dy + e = 0$$

cioè

$$y = -\frac{a}{2d}x^2 - \frac{c}{d}y - \frac{e}{2d}$$

equazione che rappresenta una **parabola** con asse di simmetria parallelo all'asse y.

**4° caso   $a \neq 0$; $b \neq 0$**

Dimostriamo che in questo caso che l'equazione

$$ax^2 + by^2 + 2cx + 2dy + e = 0$$

rappresenta un'**ellissi** o un'**iperbole** con assi di simmetria paralleli agli assi coordinati.
Infatti la $ax^2 + by^2 + 2cx + 2dy + e = 0$ si può scrivere nella forma :

$$a\left(x^2 + \frac{2c}{a}x\right) + b\left(y^2 + \frac{2d}{b}y\right) + e = 0$$

ossia aggiungendo e togliendo opportune quantità

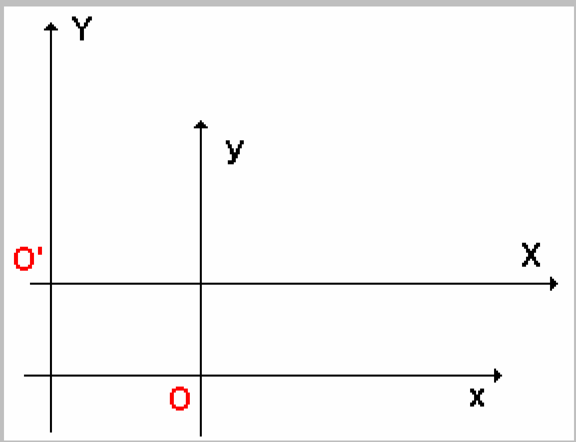
$$a\left(x^2 + \frac{2c}{a}x + \frac{c^2}{a^2}\right) + b\left(y^2 + \frac{2d}{b}y + \frac{d^2}{b^2}\right) - \frac{c^2}{a} - \frac{d^2}{b} + e = 0$$

da cui si ottiene

$$a\left(x + \frac{c}{a}\right)^2 + b\left(y + \frac{d}{b}\right)^2 = k$$

$$\text{dove } k = +\frac{c^2}{a} + \frac{d^2}{b} - e$$

Considerata la traslazione di assi che porta O in $O'\left(-\frac{c}{a}; -\frac{d}{b}\right)$, come si vede dalla figura e avremo:




$$\begin{cases} X = x + \dfrac{c}{a} \\ Y = y + \dfrac{d}{b} \end{cases}$$

E l'equazione data diviene :

$$aX^2 + bY^2 = k$$

vi sono allora due possibilità.

**1^   ab > 0**, cioè a e b concordi. In tal caso

- per k = 0 , l'equazione diviene

$$aX^2 + bY^2 = 0$$

soddisfatta solo dalle coordinate dell'origine;

- per $k \neq 0$, e solo nel caso in cui k abbia lo stesso segno di a e b, si ha una curva reale di equazione

$$\frac{X^2}{\frac{k}{a}} + \frac{Y^2}{\frac{k}{b}} = 1$$

che rappresenta quindi un'ellissi di semiassi $\sqrt{\frac{k}{a}}$ e $\sqrt{\frac{k}{b}}$

2^ ab < 0, cioè a e b discordi. In tal caso

- per k = 0 , l'equazione diviene

$$aX^2 + bY^2 = 0$$

si riduce a una coppia di rette passanti per O';
- per k ≠ 0, la equazione $aX^2 + bY^2 = k$ si può scrivere nella forma

$$\frac{X^2}{\frac{k}{a}} - \frac{Y^2}{-\frac{k}{b}} = 1$$

e osservando che k/a e –k/b hanno lo stesso segno, poiché a e b sono discordi, si può concludere che l'equazione data rappresenta un'iperbole di semiassi $\sqrt{\left|\frac{k}{a}\right|}$ e $\sqrt{\left|\frac{k}{b}\right|}$ .

## Luogo geometrico

In geometria euclidea si definisce luogo geometrico l'insieme di tutti e soli i punti che godono di una data proprietà.
In geometria analitica per luogo geometrico si intende l'insieme di tutti e soli punti del piano le cui coordinate verificano una equazione del tipo:

$$F(x,y) = 0$$

detta equazione del luogo.

## Esercizi Retta

### Problema 1.

**Scrivere l'equazione di una retta passante per un dato punto $P = (x_1 , y_1)$.**

Premettiamo che il problema ammette infinite soluzioni. Una generica retta è del tipo

$$\mathbf{y = mx + n} \qquad (1)$$

Dovendo passare per $(x_1 , y_1)$, deve essere $\quad y_1 = mx_1 + n$

da cui $\quad n = y_1 - m\, x_1$

Sostituendo nella (1), si ha $\quad y = m\,x + y_1 - m\,x_1$

e anche $\quad \dfrac{y - y_1}{x - x_1} = m$

oppure $\quad y - y_1 = m(x - x_1)$.

In questa equazione compare il *parametro variabile m*, d'accordo col fatto che *per un punto passano infinite rette;* si dice più propriamente che l'equazione

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = m \qquad \text{ovvero} \qquad y - y_1 = m(x - x_1).$$

è l'equazione di un fascio di rette aventi per sostegno il punto $(x_1 , y_1)$.

*Esempio:* Scrivere l'equazione del fascio di rette passanti per il punto (2, – 3).

Si ha: $\quad \dfrac{y + 3}{x - 2} = m$

### Problema 2.

**Scrivere l'equazione della retta passante per i punti $P = (x_1 , y_1)$, e $Q = (x_2 , y_2)$.**

Premesso che se fosse $x_1 = x_2$ i due punti avrebbero ascisse uguali per cui la retta che li congiunge sarebbe parallela all'asse delle *y* e avrebbe per equazione $x = x_1$ si può supporre $x \neq x_1$ .

Una generica retta del fascio di sostegno *P* è $\quad \dfrac{y - y_1}{x - x_1} = m \qquad (1)$

Dovendo passare per *Q*, si ha $\quad \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = m \qquad (2)$

Dalla (1) e (2) si ricava $\quad \dfrac{y - y_1}{x - x_1} = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \qquad (3)$

che è l'equazione richiesta.

La relazione (2) prova che

**Il coefficiente angolare della retta non parallela all'asse delle y e passante per due punti è uguale al rapporto fra la differenza delle ordinate e la differenza delle ascisse dei punti stessi.**

*Esempio:* Scrivere l'equazione della retta passante per i punii (3, – 4) e (2, 1)-

Applicando la (3), risulta $\quad \dfrac{y + 4}{x - 3} = \dfrac{1 + 4}{2 - 3} \quad$ ossia $\quad \dfrac{y + 4}{x - 3} = -5$

che è l'equazione richiesta.

Essa si può anche scrivere $\quad y + 4 = - 5x + 15$

e cioè

$5x + y - 11 = 0 \qquad$ (equazione canonica)

ovvero $\quad y = - 5x + 11 \qquad$ (equazione esplicita)

oppure $\quad \dfrac{x}{\frac{11}{5}} + \dfrac{y}{11} = 1 \qquad$ (equazione segmentaria).

Problema 3.

**Scrivere l’equazione della parallela alla retta y = mx + n passante per il punto P = ($x_1$ , $y_1$).**

Una retta per il punto P è $$\frac{y-y_1}{x-x_1}=k$$

Dovendo essere parallela alla retta data, deve essere k = m; quindi l’equazione della parallela richiesta è $$\frac{y-y_1}{x-x_1}=m$$

ed anche $$\mathbf{y - y_1 = m(x - x_1)}$$

**Nota pratica**

Data la retta a x + b y + c = 0 la parallela ad essa per P = ($x_1$ , $y_1$) è :

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

essendo $m = -\frac{a}{b}$ abbiamo $$y - y_1 = -\frac{a}{b}(x - x_1)$$

cioè $$\mathbf{a(x - x_1) + b(y - y_1) = 0}$$

Problema 4.

**Scrivere l’equazione della parallela alla retta 3x – y + 4 = 0 passante per il puntoP(1;2).**

Una generica retta per il punto dato è: $$\frac{y-2}{x-1}=m$$

essendo il coefficiente angolare della retta data pari a $m = -\frac{a}{b} = \frac{-3}{-1} = 3$ la retta richiesta è

$$\frac{y-2}{x-1}=3 \qquad \text{ossia} \qquad y - 2 = 3x - 3$$

ed anche $$3x - y - 1 = 0$$

**Altra procedura**

Una generica parallela alla retta data ha equazione 3x – y + k = 0
dovendo passare per P = (1;2), deve essere (sostituisci per imporre il passaggio):

$$3 - 2 + k = 0 \qquad \text{da cui} \qquad k = -1$$

sostituendo riotteniamo la retta cercata 3x – y – 1 = 0

Problema 5.

**Scrivere l’equazione della perpendicolare alla retta y = mx + n passante per il punto P = ($x_1$ , $y_1$).**

Una retta del fascio di sostegno è del tipo $$\frac{y-y_1}{x-x_1}=k$$

quest’ultima affinché sia perpendicolare alla retta data deve essere $k = -\frac{1}{m}$ quindi :

$$\frac{y-y_1}{x-x_1}=-\frac{1}{m}$$

$$\mathbf{(y - y_1) = -\frac{1}{m}(x - x_1)}$$

**Nota pratica**
Se le rette sono date nella forma

$$a\,x + b\,y + c = 0 \qquad \text{e} \qquad a'x + b'y + c' = 0$$

la condizione $m' = -\dfrac{1}{m}$ diviene $-\dfrac{a'}{b'} = \dfrac{b}{a}$ quindi

ritroviamo $$\frac{y - y_1}{x - x_1} = -\frac{1}{m}$$

cioè $$(y - y_1) = -\frac{1}{m}(x - x_1)$$

da cui $$(y - y_1) = \frac{b}{a}(x - x_1)$$

e quindi $$\mathbf{b(x - x_1) - a\,(y - y_1) = 0}$$

Problema 6.

**In un sistema ortonormale scrivere l'equazione della perpendicolare alla retta 3x + 5y + 2 = 0 passante per il punto P = (1 ; 2).**

Sfruttando l'ultima relazione scritta avremo che la perpendicolare richiesta avrà per equazione, essendo a = 3 e b = 5 con $m' = -\dfrac{1}{m} = \dfrac{-1}{-\dfrac{3}{5}} = \dfrac{5}{3}$:

$$5(x - 1) - 3(y - 2) = 0$$

ossia $$5x - 3y + 1 = 0$$

ottenibile anche da $$\frac{y - 2}{x - 1} = \frac{5}{3}$$

Problema 7.

**Trovare la misura della distanza di P = (1; –3) dalla retta 3x + 4y – 2 = 0.**

Semplice applicazione della distanza punto retta cioè : $d = \left|\dfrac{ax_1 + by_1 + c}{\sqrt{(a^2 + b^2)}}\right|$

$$d = \left|\frac{3 \bullet 1 + 4(-3) - 2}{\sqrt{9 + 16}}\right| = \frac{11}{5}$$

## Esercizi Circonferenza

Trovare, se esistono, le intersezioni di una circonferenza con una retta data.

Problema 8.

**Trovare le intersezioni della circonferenza $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 3 = 0$ con la retta x + y – 3 = 0.**

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 4x + 6y - 3 = 0 \\ x + y - 3 = 0 \end{cases}$$

Risolvendo, essendo $\Delta > 0$, si ottiene

$$\begin{cases} x_1 = 2 \\ y_1 = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_2 = 6 \\ y_2 = -3 \end{cases}$$

La circonferenza e la retta s'intersecano in P(2,1) e Q(6, –3) e la retta è secante.

## Problema 9.

**Trovare le intersezioni della circonferenza $x^2 + y^2 = 9$ con la retta $x + y = 6$.**

Si deve risolvere il sistema

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 9 \\ x + y = 6 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 6 - y \\ 2y^2 - 12y + 27 = 0 \end{cases}$$

da cui $y = \dfrac{6 \pm \sqrt{36 - 54}}{2}$ essendo $\Delta < 0$, le radici non sono reali, quindi la retta è esterna alla circonferenza.

## Problema 10.

**Trovare le intersezioni della circonferenza $x^2 + y^2 = 5$ con la retta $2x + y - 5 = 0$.**

Si deve risolvere il sistema

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 5 \\ 2x + y - 5 = 0 \end{cases}$$

essendo $\Delta = 0$

avremo $x_1 = x_2 = 2$ e $y_1 = y_2 = 1$ quindi la retta è tangente alla circonferenza

## Problema 11.

**Trovare l'equazione della circonferenza di centro C = (1,2) passante per P = (3,4).**

Si ha $r = CP = \sqrt{(3-1)^2 + (4-2)^2} = 2\sqrt{2}$ quindi l'equazione richiesta è:

$$(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 8$$

## Problema 12.

**Scrivere l'equazione della circonferenza passante per A = (1,0) B = (4,0) e C = (0,3).**

1) metodo

Si trovano le equazioni dei due assi dei segmenti AB e BC; la loro intersezione fornisce il centro, e nel determinare poi il raggio, che è la distanza dal centro da uno dei punti dati e il problema è ricondotto al precedente.

2) metodo

Una generica circonferenza ha per equazione $x^2 + y^2 + m x + ny + p = 0$

Dovendo passare per i punti dati, le coordinate di tali punti debbono soddisfare questa equazione, per cui si ottengono le relazioni :

$$\begin{cases} 1 + m + p = 0 \\ 16 + 4m + p = 0 \\ 9 + 3n + p = 0 \end{cases}$$

Queste relazioni costituiscono un sistema di I° grado di tre equazioni in tre incognite che, risolto, da $m = -5$; $n = -\dfrac{13}{3}$; $p = 4$

L'equazione della circonferenza richiesta è quindi : $x^2 + y^2 - 5x - \dfrac{13}{3}y + 4 = 0$

Problema 13.

**Trovare l'intersezione della circonferenza di centro C = (3,4) e raggio lungo 2, con la retta passante per P = (1,4) di coefficiente angolare – 1.**

Basta risolvere il sistema

$$\begin{cases} (x-3)^2 + (y-4)^2 = 4 \\ y - 4 = -1\,(x-1) \end{cases}$$

Si ottengono i punti d'intersezione P(1,4) e Q(3,2)

Problema 14.

**Trovare le intersezioni delle circonferenze**

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 4x - 2y - 20 = 0 \quad (1) \\ x^2 + y^2 - 8x + 2y - 28 = 0 \quad (2) \end{cases}$$

(Lo studente faccia la figura).

Basta far sistema fra le due equazioni date. Per risolvere tale sistemi dalla (1) sottraiamo la (2) ottenendo $12x - 4y + 8 = 0$ e cioè $3x - y + 2 = 0$ (3)

Questa è l'equazione dell'asse *radicale* delle due circonferenze.
(Ricorda che **l'asse *radicale*** *è la retta che gode della proprietà che i segmenti di tangenti condotti alle due circonferenze da un punto qualsiasi di esso, non contenente i centri delle due circonferenze stesse, sono uguali, ed è perpendicolare alla congiungente i due centri stessi, non esiste se le due circonferenze sono concentriche).*

Fatto sistema fra la (3) e una qualsiasi delle equazioni (1) o (2), per opportunità con la (1), si ottengono le intersezioni richieste:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 4x - 2y - 20 = 0 \\ 3x - y + 2 = 0. \end{cases}$$

cioè

$$\begin{cases} x_1 = 1 \\ y_1 = 5 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_2 = -2 \\ y_2 = -4 \end{cases}$$

cioè i punti d'intersezione sono (1,5) e (–2, –4) direttamente verificabile dalla rappresentazione grafica.

Problema 15.

**E' data la circonferenza di centro C = (1, –2)e di misura del raggio 3; trovare l'equazione della tangente ad essa in un suo punto di ascissa 3.**

L'equazione della circonferenza è $(x-1)^2 + (y+2)^2 = 9$

Per trovare i punti di essa che hanno per ascissa 3, basterà porre nell'equazione data $x = 3$; con facili calcoli si ottengono i punti

$$P = (3; -2+\sqrt{5}) \quad \text{e} \quad Q = (3; -2-\sqrt{5}).$$

Troviamo ora la tangente alla circonferenza per P.

Una generica retta per P ha per equazione

$$\mathbf{y + 2 - \sqrt{5} = m(x - 3)} \qquad (1)$$

Affinchè essa risulti tangente alla circonferenza, deve essere perpendicolare a *PC*.

Il coefficiente angolare di *PC* è (essendo $m = \dfrac{y - y_1}{x - x_1}$ con C = (1, –2))

$$m = \frac{-2 + 2 - \sqrt{5}}{1 - 3} = \frac{-\sqrt{5}}{-2} = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

quindi quello della tangente, sua perpendicolare, è $\quad m' = -\dfrac{1}{m} = -\dfrac{2}{\sqrt{5}}$

La tangente per P è quindi $\quad y + 2 - \sqrt{5} = -\dfrac{2}{\sqrt{5}}(x - 3)$.

*Osservazione:* Questo problema può risolversi in vari altri modi, come ad esempio imponendo che la retta (1) sia a distanza 3 dal centro C(1, –2).

$$d = \left|\frac{ax_1 + by_1 + c}{\sqrt{(a^2 + b^2)}}\right| = \left|\frac{-2 - m + 3m + 2 - \sqrt{5}}{\sqrt{m^2 + 1}}\right| = 3$$

$$\left(2m - \sqrt{5}\right)^2 = 9\left(\sqrt{m^2 + 1}\right)^2$$

$$5m^2 + 4m\sqrt{5} + 4 = 0$$

$$m = \frac{2\sqrt{5} \pm \sqrt{20 - 20}}{5} = -\frac{2\sqrt{5}}{5} = \frac{-2}{\sqrt{5}}$$

## Problema 16.

**Trovare le equazioni delle tangenti alla circonferenza $x^2 - y^2 + 6x - 2y - 15 = 0$ condotte per il punto P = (3 ;6).**

La circonferenza data ha il centro in C = (–3; 1) e raggio lungo

$$r = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2 - 4c} = \frac{1}{2}\sqrt{36 + 4 + 60} = 5$$

II problema si può risolvere in due modi, ed ecco come :

1) Si scrive una generica retta per P = (3; 6); essa è

$$y - 6 = m\,(x - 3) \qquad (1)$$

Si fa sistema fra questa retta e l'equazione della circonferenza, imponendo la condizione che il discriminante dell'equazione risolvente di secondo grado sia nullo. Si ottengono allora due valori di *m*, che, sostituiti nella (1), danno le due tangenti richieste.

2) Scritta la (1) in forma canonica, si impone la condizione che la sua distanza da *C* sia 5. Si ottiene allora $\quad d = \left|\dfrac{ax_1 + by_1 + c}{\sqrt{(a^2 + b^2)}}\right| = \left|\dfrac{-3m - 1 + 6 - 3m}{\sqrt{m^2 + 1}}\right| = 5$

da cui $\quad 11\,m^2 - 60\,m = 0 \quad$ che risolta, da $\quad m = 0\;$ e $\;m = \dfrac{60}{11}$.

Sostituendo questi valori nella (1), si hanno le tangenti richieste e cioè

$$y = 6,$$

e $\quad y - 6 = -\dfrac{60}{11}(x - 3)$.

Problema 17.

**Scrivere l'equazione della circonferenza di centro C = (– 5, – 4) tangente alla retta 2x + y + 6 =0.**

Il raggio non è altro che la distanza di C dalla retta data; è quindi

$$d = \left| \frac{ax_1 + by_1 + c}{\sqrt{(a^2 + b^2)}} \right| = \left| \frac{-10 - 4 + 6}{\sqrt{4+1}} \right| = \frac{8}{\sqrt{5}}$$

da cui l'equazione $(x + 5)^2 + (y + 4)^2 = 64/5$

## Esercizi Parabola

Sintetizziamo in un quadro sinottico le formule relative ai due tipi di parabole:

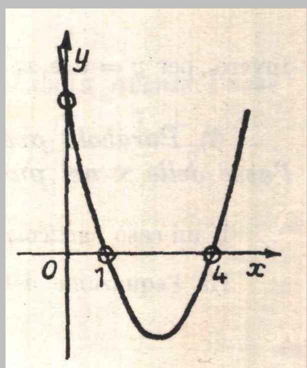
| **Tipo di parabola** | **Asse // asse delle y** $y = ax^2 + bx + c$ | **Asse // all'asse delle x** $x = ay^2 + by + c$ |
|---|---|---|
| **Fuoco** | $F = \left( -\frac{b}{2a}, \frac{1-\Delta}{4a} \right)$ | $F = \left( \frac{1-\Delta}{4a}, -\frac{b}{2a} \right)$ |
| **Vertice** | $V = \left( -\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a} \right)$ | $V = \left( -\frac{\Delta}{4a}, -\frac{b}{2a} \right)$ |
| **Asse** | $x = -\frac{b}{2a}$ | $y = -\frac{b}{2a}$ |
| **direttrice** | $y = \left( -\frac{1}{2a} - \frac{\Delta}{4a} \right)$ | $x = -\frac{1+\Delta}{4a}$ |
| **Tang. al vertice** | $y = \left( -\frac{\Delta}{4a} \right)$ | $x = \left( -\frac{\Delta}{4a} \right)$ |
| **Concavità a > 0** | La curva volge la concavità nella direzione positiva dell'asse y | La curva volge la concavità nella direzione positiva dell'asse x |
| **Concavità a < 0** | La curva volge la concavità nella direzione negativa dell'asse y | La curva volge la concavità nella direzione negativa dell'asse x |

N.B.:

Se è $a > 0$, come già si è visto, la parabola volge la concavità verso la direzione positiva dell'asse delle $y$, o, come si suoi dire, ha un MINIMO;

se è $a < 0$ la parabola volge la concavità verso la direzione negativa dello stesso asse, o, come si suoi dire, ha un MASSIMO.

## Risoluzione grafica dell'equazione di 2° grado




L'equazione di 2° grado

$ax^2 + bx + c = 0$ *(1)*

è evidentemente equivalente al sistema

$$\begin{cases} y = a x^{ì} + b x + c & (2) \\ y = 0; & (3) \end{cases}$$

quindi, per risolvere la (1), basta trovare le intersezioni della parabola (2) con l'asse $x$ ($y = 0$).
*Esempio:* La risoluzione grafica dell'equazione :

$$x^2 - 5x + 4 = 0$$

è data dalla figura della pagina precedente.
Da essa risultano le radici $x_1 = 1$ e $x_2 = 4$.

## Equazioni di particolari parabole

Nella risoluzione dei problemi, giova tener presente le equazioni di alcune parabole, soddisfacenti a particolari condizioni.

### Problema 18.

**Parabola avente l'asse parallelo all'asse delle y, passante per due punti (m, 0) ed (n, 0), dell'asse delle x.**

Ha l'equazione del tipo

$$y = k(x - m)(x - n)$$

Invero, per $y = 0$, si ha $x_1 = m$ ed $x_2 = n$.

### Problema 19.

**Parabola avente l'asse parallelo all'asse delle y, passante per il punto (m, 0) dell'asse delle x.**

Ha l'equazione della forma

$$y = k(x - a)(x - m). \qquad (2)$$

Invero, per $y = 0$, si ha $x_1 = m$.

### Problema 20.

**Parabola avente l'asse parallelo all'asse delle y, tangente all'asse delle x in un generico punto.**

È della forma

$$y = (kx + a)^2 \qquad (3)$$

Invero, per $y = 0$ è $x_1 = x_2 = -\frac{a}{k}$.

### Problema 21.

**Parabola avente l'asse parallelo all'asse delle y, tangente all'asse delle x nel punto (m, 0).**

È un caso particolare del precedente ; solo è dato anche il punto di tangenza.
Ha l'equazione del tipo

$$y = k(x - m)^2. \qquad (4)$$

Invero, per $y = 0$, è $x_t = x_2 = m$.

### Problema 22

**Scrivere l'equazione della parabola, avente l'asse parallelo all'asse delle y, passante per (2; 0), (4; 0) e (1; 1).**

È della forma $y = k(x - 2)(x - 4)$.
Dovendo passare per (1; 1), deve essere $1 = k(l - 2)(l - 4)$,
da cui si trae $k = 1/3$
La parabola ha quindi per equazione

$$y = 1/3\,(x - 2)(x - 4).$$

## Problema 23

**Scrivere l'equazione della parabola avente l'asse parallelo all'asse delle y, tangente all'asse delle x in (a, 0) e passante per (0; 2 a).**

È della forma $y = k\,(x - a)^2$.

Dovendo passare per (0,2a), risulta $2\,a = k\,a^2$,

da cui $k = 2/a$

E quindi $y = 2/a(x - a)^2$.

## Problema 24

**Scrivere l'equazione della parabola avente l'asse parallelo all'asse delle y, passante per i punti ( 0 ; 1/4 ) e $\left[-\frac{1+\sqrt{3}}{2}, \frac{(2+\sqrt{3})^2}{4}\right]$ e tangente all'asse delle x.**

È della forma $y = (hx + c)^2$.

Dovendo passare per (0; 1/4) deve essere $\frac{1}{4} = c^2$, da cui $c = \pm\frac{1}{2}$.

Dovendo passare per $\left[-\frac{1+\sqrt{3}}{2}, \frac{(2+\sqrt{3})^2}{4}\right]$, deve essere $\frac{(2+\sqrt{3})^2}{4} = \left(-\frac{1+\sqrt{3}}{2}h \pm \frac{1}{2}\right)^2$ da cui

$\frac{2+\sqrt{3}}{2} = -\frac{1+\sqrt{3}}{2}h \pm \frac{1}{2}$ che da $h_1 = -\sqrt{3}$ ed $h_2 = -1$.

Si hanno pertanto due parabole che soddisfano il problema proposto, e cioè

$$y = (-\sqrt{3}\,x - \frac{1}{2})^2 \qquad \text{ed} \qquad y = (-x + \frac{1}{2})^2$$

ossia: $y = 3x^2 + \sqrt{3}\,x + \frac{1}{4}$ $\quad y = x^2 - x + \frac{1}{4}$

# Esercizi Ellisse

## Problema 25

**- Studiare la curva $4x^2 + y^2 = 8$.**

Essa è un'ellisse e si può scrivere $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{8} = 1$

Le lunghezze dei suoi semiassi sono $a = \sqrt{2}$, $b = 2\sqrt{2}$.

L'asse maggiore è l'asse delle *y;* su esso si trovano i fuochi di coordinate

$$F_1 = (0, \sqrt{6}) \quad \text{e} \quad F_2 = (0, -\sqrt{6});$$

invero è $c = \sqrt{b^2 - a^2} = \sqrt{8-2} = \sqrt{6}$

I vertici hanno per coordinate

$$A_1 = (-\sqrt{2}, 0), \qquad A_2 = (\sqrt{2}, 0),$$
$$B_1 = (0, -2\sqrt{2}), \quad B_2 = (0, 2\sqrt{2}).$$

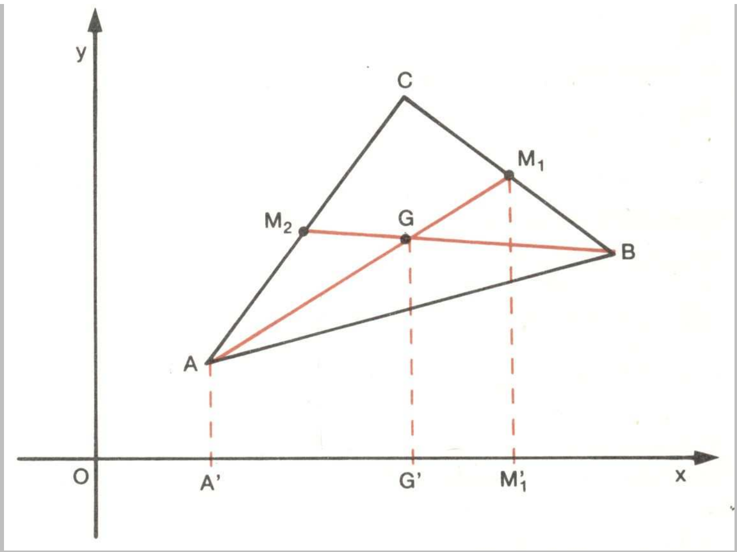
## Esercizi Vari

### Problema 26

**Dato il triangolo di vertici A($x_1$; $y_1$), B($x_2$ ; $y_2$), C($x_3$ ; $y_3$), dimostrare che le coordinate del baricentro sono rispettivamente $\frac{x_1+x_2+x_3}{3}$ e $\frac{y_1+y_2+y_3}{3}$ ; dimostrare cioè che le coordinate del baricentro ( punto d'incontro delle tre mediane ) di un triangolo sono la media aritmetica delle omologhe coordinate dei tre vertici.**

Allo scopo si consideri la figura, nella quale è rappresentato il triangolo ABC.

$M_1\left(\frac{x_2+x_3}{2};\frac{y_2+y_3}{2}\right)$ ed $M_2\left(\frac{x_1+x_3}{2};\frac{y_1+y_3}{2}\right)$ sono i punti medi rispettivamente dei lati BC e C; $AM_1$ e $BM_2$ sono due mediane; G è il baricentro.




A', G', $M_1$', sono le proiezioni ortogonali di A, G, $M_1$, sull'asse x. Per la proprietà del baricentro di un triangolo è $AG = 2GM_1$, e quindi anche $A'G' = 2G'M_1'$.

Ne consegue che :

$x_G = x_{G'} = x_1 + 2(x_{M1} - x_{G'}) =$

$x_1 + 2x_{M1} - 2x_{G'}$

quindi

(1) $x_{G'} = x_1 + 2x_{M1} - 2x_{G'}$

cioè

$x_{G'} + 2x_{G'} = x_1 + 2x_{M1}$

$3x_{G'} = x_1 + 2\left(\frac{x_2+x_3}{2}\right)$ da cui

$\mathbf{x_G = x_{G'}} = \left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3}\right)$ e analogamente $\mathbf{y_G} = \left(\frac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)$

La (1) si poteva impostare anche tenendo conto della proprietà del baricentro cioè

$x_G = x_{G'} = x_1 + \frac{2}{3}(x_{M1} - x_1)$ quindi sostituendo e con facili calcoli algebrici si riottiene la formula già scritta.

Altri punti notevoli dei triangoli sono:

- **ortocentro**: punto d'incontro delle tre altezze.
- **incentro**: punto d'incontro delle tre bisettrici ( centro del cerchio inscritto)
- **circocentro** : punto d'incontro dei suoi tre assi.

### Problema 27

**Determinare l'equazione dell'asse di un segmento.**

I° modo

L'asse di un segmento di estremi A($x_1$; $y_1$), B($x_2$ ; $y_2$), è la retta perpendicolare al segmento e passante per il suo punto medio $M\left(\frac{x_1+x_2}{2};\frac{y_1+y_2}{2}\right)$; per avere la sua equazione si potrà quindi scrivere l'equazione della retta r passante per M e di coefficiente angolare antireciproco di quello della retta AB ( retta perpendicolare m = 1/m').

II° modo

L'equazione dell'asse di un segmento può però venir trovata anche per un'altra via, e precisamente, ricordando che **l'asse è il luogo dei punti del piano equidistanti dagli estremi del segmento**. Perciò la condizione necessaria e sufficiente affinché un punto P(x;y) sia sull'asse del segmento di estremi A e B è che sia $|PA| = |PB|$.

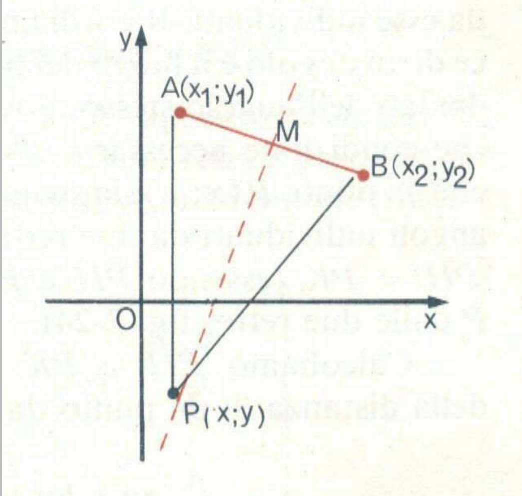


*Figura* La retta *PM* è l'asse del segmento *AB*.

Calcolando le misure $|PA|$ e $|PB|$ con la formula della distanza tra due punti e uguagliandole avremo:

$$|PA| = \sqrt{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2} \quad ;$$

$$|PB| = \sqrt{(x-x_2)^2+(y-y_2)^2}$$

$$\sqrt{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2} = \sqrt{(x-x_2)^2+(y-y_2)^2}$$

da cui

$$(x-x_1)^2+(y-y_1)^2 = (x-x_2)^2+(y-y_2)^2$$

che è appunto l'equazione dell'asse del segmento di estremi A($x_1$; $y_1$), B($x_2$ ; $y_2$).

## Problema 28

**Determinare l'equazione delle bisettrici degli angoli individuati da due rette incidenti.**

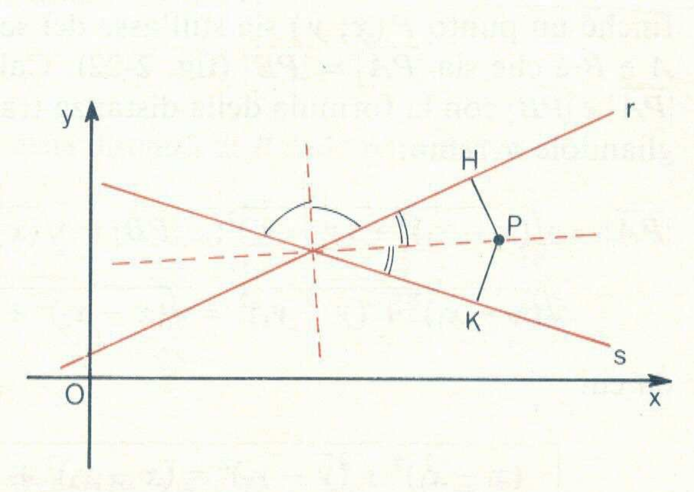


*Figura* I punti delle bisettrici degli angoli formati dalle due rette *r* ed *s* sono equidistanti dalle due rette stesse.

Date due rette incidenti r ed s di equazioni rispettivamente

ax + by + c = 0 e a'x + b'y + c' = 0,

si vogliono trovare le equazioni delle due rette bisettrici dei quattro angoli da esse individuati. Ricordiamo che la **bisettrice di un angolo è il luogo dei punti equidistanti dai lati dell'angolo stesso**; potremo allora dire che condizione necessaria e sufficiente affinché un punto P(x;y) sia su una bisettrice degli angoli individuati da due rette r ed s è che sia $|PH| = |PK|$ essendo $|PH|$ e $|PK|$ le distanze di P dalle due rette.

Calcoliamo $|PH|$ e $|PK|$ con la formula della distanza di un punto da una retta :

$$|PH| = \left| \frac{ax+by+c}{\sqrt{(a^2+b^2)}} \right|$$

$$|PK| = \left| \frac{a'x+b'y+c'}{\sqrt{(a'^2+b'^2)}} \right|$$

dovrà allora essere
$$\frac{|ax+by+c|}{\sqrt{(a^2+b^2)}} = \frac{|a'x+b'y+c'|}{\sqrt{(a'^2+b'^2)}}$$

quest'ultima uguaglianza equivale alle due equazioni :

**1)** $\dfrac{ax+by+c}{\sqrt{(a^2+b^2)}} = +\dfrac{a'x+b'y+c'}{\sqrt{(a'^2+b'^2)}}$ **2)** $\dfrac{ax+by+c}{\sqrt{(a^2+b^2)}} = -\dfrac{a'x+b'y+c'}{\sqrt{(a'^2+b'^2)}}$

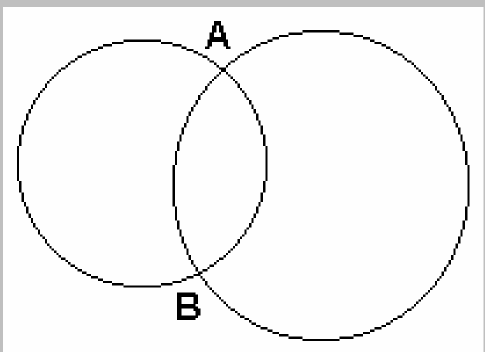
che sono appunto le equazioni delle due bisettrici degli angoli individuati dalle rette incidenti r ed s.

## Problema 29

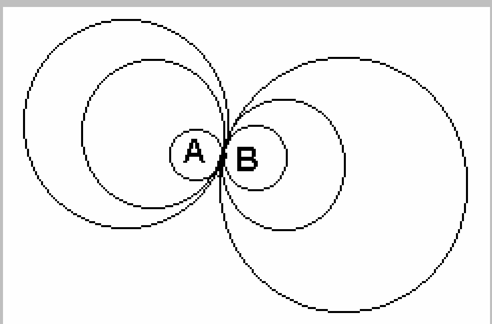
**Sui fasci di circoli**

E' l'insieme delle infinite coniche che passano per due punti detti punti base del fascio

A e B punti base del fascio




I punti base possono essere reali e distinti : circoli secanti




Se A e B coincidono i fasci sono tangenti,

se i punti sono immaginari si parlerà di coniche esterne.

Date le circonferenze:

1) $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$

2) $x^2 + y^2 + a'x + b'y + c' = 0$

Per determinare le circonferenze del fascio useremo la combinazione lineare :
$h ( x^2 + y^2 + ax +by + c ) + k ( x^2 + y^2 + a'x +b'y + c') = 0$
$x^2 + y^2 + ax +by + c + k/h ( x^2 + y^2 + a'x +b'y + c') = 0$ con $h \neq 0$ e posto $k/h = t$ abbiamo
$x^2 + y^2 + ax +by + c + t ( x^2 + y^2 + a'x +b'y + c') = 0$

se t = 0 otterrò la (1) prendendo la (2), per ottenere la (2) dovremo avere per t un valore infinito.

Sviluppiamo ottenendo :

$( 1 + t )x^2 + ( 1 + t )y^2 + (a + a't )x + ( b + b't ) y + c + c't = 0$

$$x^2 + y^2 + \frac{(a+a't)}{(1+t)}x + \frac{(b+b't)}{(1+t)}y + \frac{(c+c't)}{(1+t)} = 0$$

equazione canonica del fascio con $t +1 \neq 0$ cioè $t \neq -1$
se $t = -1$ la circonferenza degenera in una retta.
Il suo centro è pari a

$$C = \left(-\frac{a+a't}{2(1+t)};-\frac{b+b't}{2(1+t)}\right) \text{ il raggio } r = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{(a+a't)^2}{(1+t)^2}+\frac{(b+b't)^2}{(1+t)^2}-\frac{4(c+c't)}{1+t}}$$

## Problema 30

**Risoluzione grafica delle equazioni di 3° grado.**

Data la
$aX^3 + b X^2 + cX + d = 0$ lo scopo è quello di eliminare il termine di 2° grado

per farlo si porrà opportunamente $X = x - b/3a$ ottenendo

$$a\left(x-\frac{b}{3a}\right)^3 + b\left(x-\frac{b}{3a}\right)^2 + c\left(x-\frac{b}{3a}\right) + d = 0$$
$$a\left(x^3 - 3x^2\frac{b}{3a} + 3x\frac{b^2}{9a^2} - \frac{b^3}{27a^3}\right) + b\left(x^2 - 2x\frac{b}{3a} + \frac{b^2}{9a^2}\right) + cx - \frac{bc}{3a} + d = 0$$
$$ax^3 - x^2b + x\frac{b^2}{3a^2} - \frac{b^3}{27a^2} + x^2b - \frac{2xb^2}{3a} + \frac{b^3}{9a^2} + cx - \frac{bc}{3a} + d = 0$$
$$27a^3x^3 + 9axb^2 - b^3 - 18axb^2 + 3b^3 + 27a^2cx - 3abc + 27a^2d = 0$$
$$27a^3x^3 + x(9ab^2 - 18ab^2 + 27a^2c) + 2b^3 - 3abc + 27a^2d = 0$$
$$x^3 + x\left(\frac{+27a^2c - 9ab^2}{27a^3}\right) + \left(\frac{2b^3 - 3abc + 27a^2d}{27a^3}\right) = 0$$
$$x^3 + x\left(\frac{c}{a} - \frac{b^2}{27a^2}\right) + \left(\frac{2b^3 - 3abc + 27a^2d}{27a^3}\right) = 0$$

quindi in generale sarà della forma

$x^3 + px + q = 0$

basterà quindi risolvere questa equazione perché il problema sia risolto; basterà porre $y = x^3$ facendo sistema,

$$\begin{cases} x^3 + px + q = 0 \\ y = x^3 \end{cases} \quad \text{cioè} \quad y + px + q = 0$$

Le ascisse dei punti d'intersezione del grafico della $y = x^3$ (parabola cubica), facilmente costruibile per punti, con la retta $y + px + q = 0$ danno le radici della $x^3 + px + q = 0$.

## Problema 31

**Risoluzione grafica delle equazioni di 4° grado.**

Data la

$aX^4 + b X^3 + cX^2 + dX + e = 0$ lo scopo è quello di eliminare il termine di 3° grado

per farlo si porrà opportunamente $X = x - b/4a$ .

Analogamente all'esercizio precedente dopo vari conti algebrici si ottiene:

$x^4 + px^2 + qx + r = 0$ (*)

Posto $y = x^2$ l'equazione diventa

$y^2 + py + qx + r = 0$ aggiungendo e togliendo la stessa quantità $x^2$

$x^2 + y^2 + py + qx + r - x^2 = 0$ cioè

$x^2 + y^2 + py + qx + r - y = 0$

$x^2 + y^2 + y(p - 1) + qx + r = 0$ equazione che è risolvibile mediante il sistema

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + y(p-1) + qx + r = 0 \quad (**) \\ y = x^2 \end{cases}$$

Le radici della (*) sono quindi le ascisse dei punti d'intersezione della parabola di secondo grado con la circonferenza (**).

Si osserva inoltre che oltre ai metodi generali accennati, le equazioni di 3° e 4° grado si possono risolvere graficamente anche con altre posizioni suggerite dalla pratica:

ad esempio

$aX^3 + b X^2 + cX + d = 0$ (1)

posto $y = x^2$ (2) è equivalente al sistema

$$\begin{cases} y = x^2 \\ axy + by + cX + d \end{cases} \quad \text{cioè} \quad \begin{cases} y = x^2 \\ y = -\dfrac{cx + d}{ax + b} \quad (3) \end{cases}$$

le radici della (1) sono date dalle ascisse dei punti comuni alla parabola (2) e alla iperbole equilatera (3).

## Bibliografia


| Autore | Opera | Casa editrice - anno | Volumi |
|---|---|---|---|
| Tonolini | Metodi Analitici | Minerva Italica 1988 | I°- II° |
| Ferrauto | Elementi di Analisi Matematica | Soc. Edit.Dante Alighieri 1986 | I°- II° |
| Nisini | Complementi di Matematica | Trevisini Editore 1966 | |
| Marino | Es. Svolti di Analisi Matematica | Cetim 1993 | I°- II° |
| Bononcini Forlani | Analisi Matematica | Patron Bologna 1973 | |
| Tamagnini - Corbelli | Geometria analitica | Multimedia 2000 | |
| Villa Augusto | Geometria analitica del piano e sue applicazioni | Sonzogno Milano 1941 | |
| Zwir - Scagliantiner | Analitica e Trigonometria | CEDAM 1998 | I/A |
| Lamberti – Mereu - Nanni | Corso di Matematica Uno | Etas Libri – 1996 | |
| Cateni – Bernardi - Maracchia | Elementi di Algebra 2 | Le Monnier - 1986 | II° |


**Ai miei figli**
**con infinito amore**